RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE

Emmanuel Brun
emmanuel.brun@inserm.fr
Cours largement inspiré des cours de Simon Rit
Jakob Sauer Jorgensen
Kesner & Häggström
F. Peyrin

OBJECTIFS DU COURS

Comprendre les liens entre espace réel, le sinogramme et l'espace de Fourier

Comprendre un algorithme de reconstruction (FBP)

Comprendre un/des algorithme(s) itératif(s)

Comprendre l'origine de quelques artefacts dans les images tomo

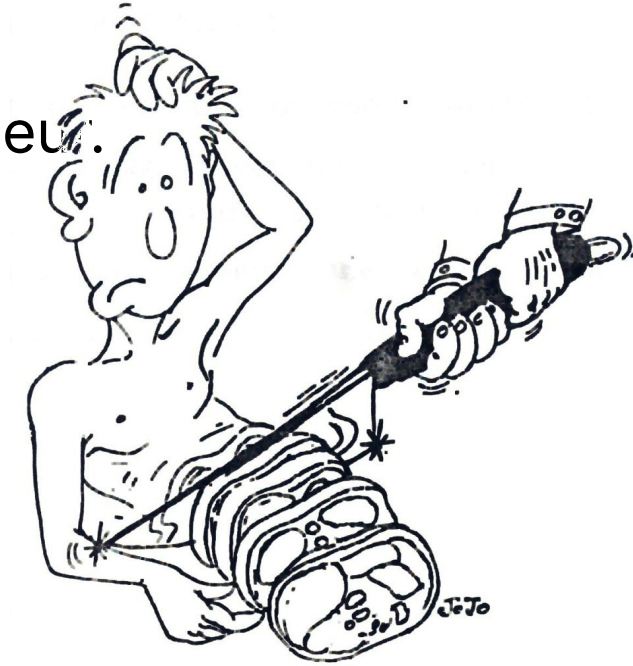
DÉFINITION

Du grec : Tomos = coupe, Graphos = description

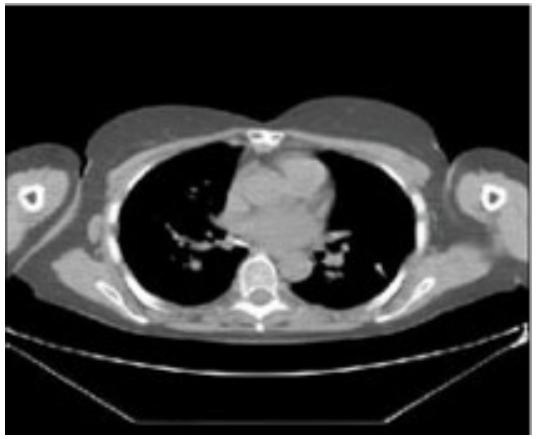
Imagerie de tranches d'un objet - sans le découper !

De nos jours, il est possible d'obtenir non seulement des tranches, mais aussi des images en 3D.

Pour voir l'intérieur, il faut obtenir des informations de l'extérieur.



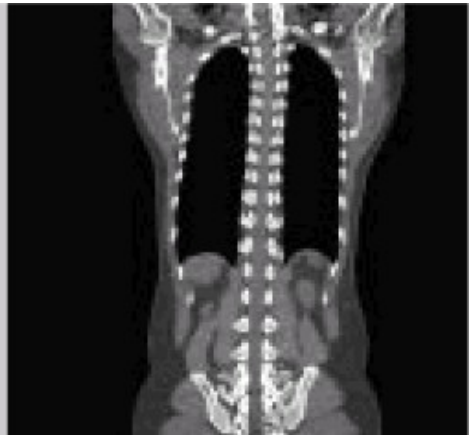
3D



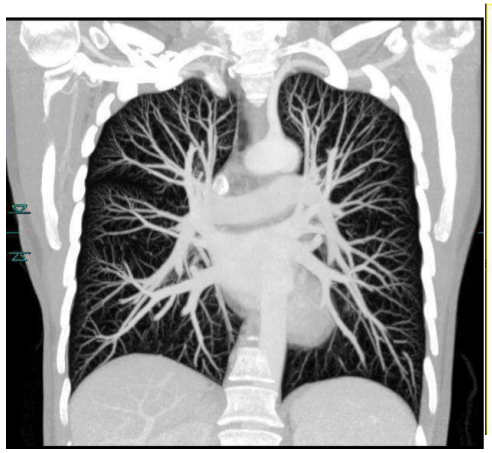
Coupe axiale



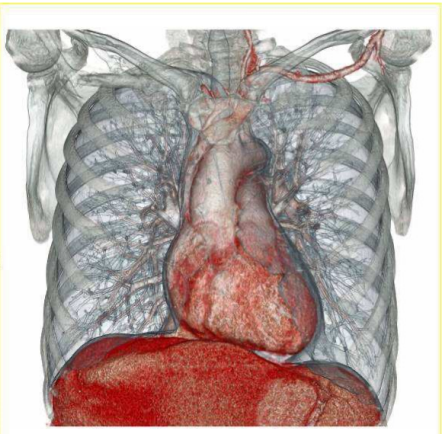
Coupe sagittal



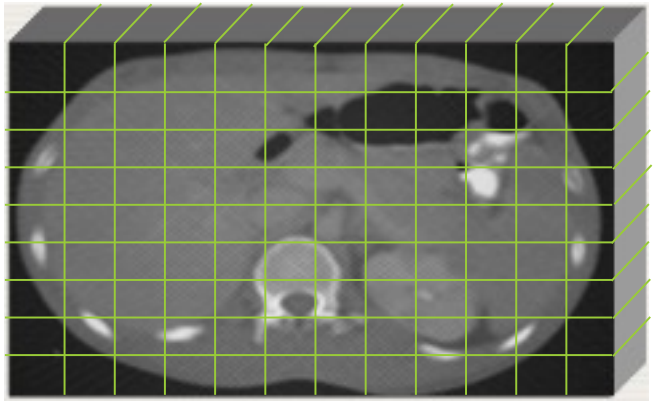
Coupe coronale



Maximum Intensity projection



Rendu volumique 3D





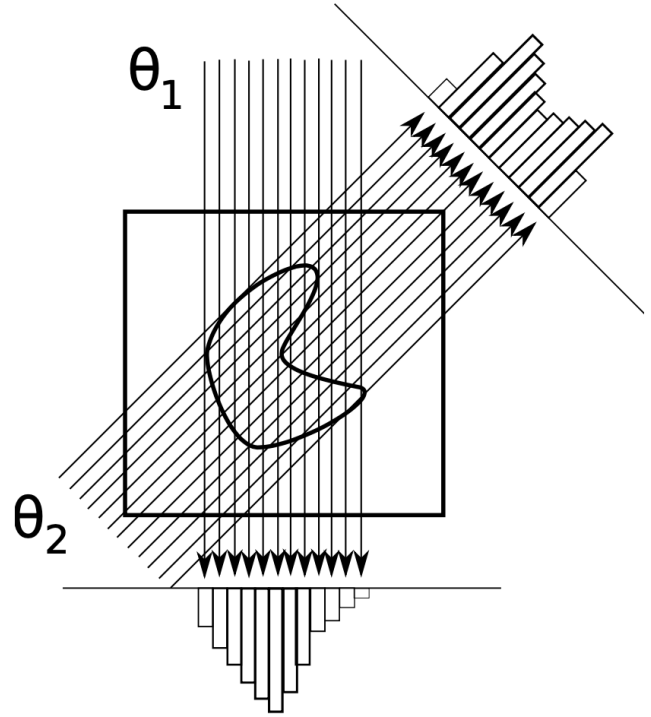
Voxel

ACQUISITION DES PROJECTIONS

Les projections sont mesurées autour d'un objet à l'aide de rayons X.

L'objectif est de reconstruire l'objet à partir des projections.

La géométrie la plus simple est celle des faisceaux parallèles en 2D, sur laquelle nous nous concentrerons dans la suite (Utilisée dans les premiers scanners et dans les installations synchrotron à grande échelle)



ACQUISITION D'UN SINOGRAME (SCANNER X OU SPECT)

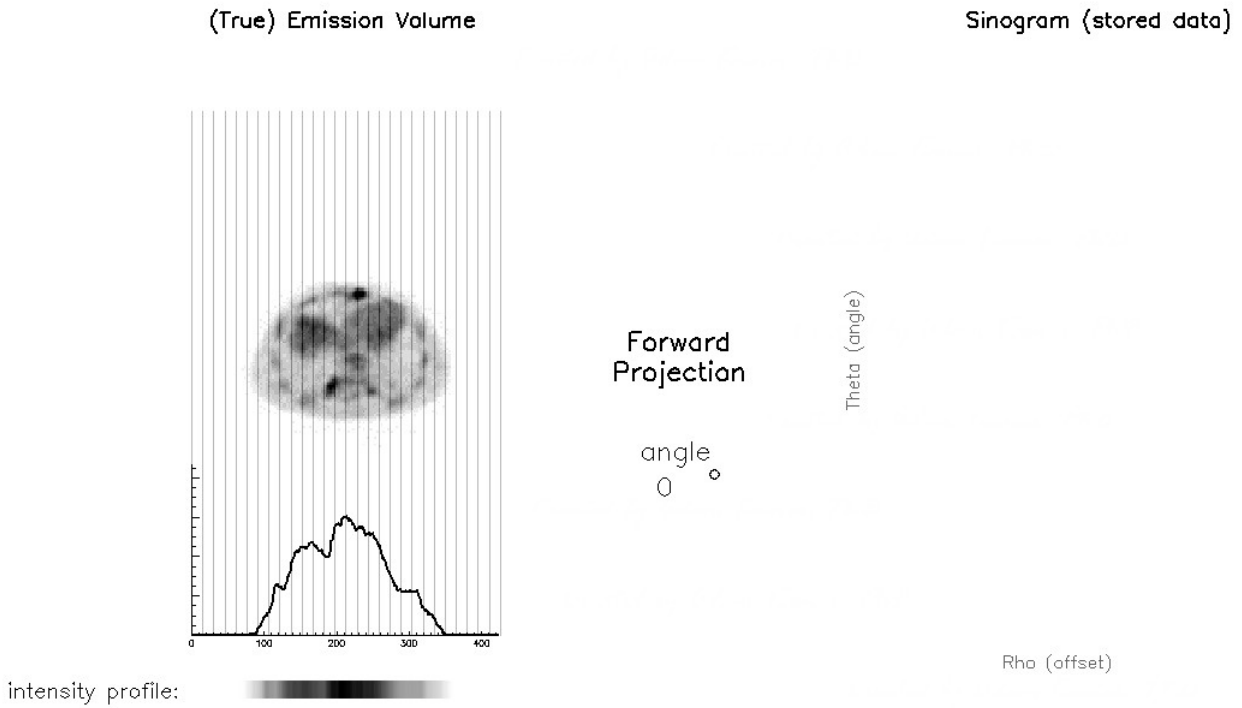
Un sinogramme enregistre les profils de projection détectés à chaque angle.

Le gif illustre une acquisition SPECT, où l'information sur la biodistribution d'un traceur radioactif est émise depuis l'intérieur du patient (par émission de photons) et virtuellement enregistrée par les détecteurs rotatifs (un balayage d'émission).

Un scanner X fonctionne de la même manière, sauf que les photons qui atteignent le détecteur proviennent d'une source de rayons X située de l'autre côté du patient (scanner de transmission).

Une tomodensitométrie en transmission nous donne des informations sur les propriétés d'atténuation de l'objet imagé, ce qui nous permet d'obtenir des informations anatomiques.

En revanche, une scintigraphie d'émission SPECT nous indique où un produit pharmaceutique se répartit dans le corps, ce qui fournit des informations fonctionnelles.



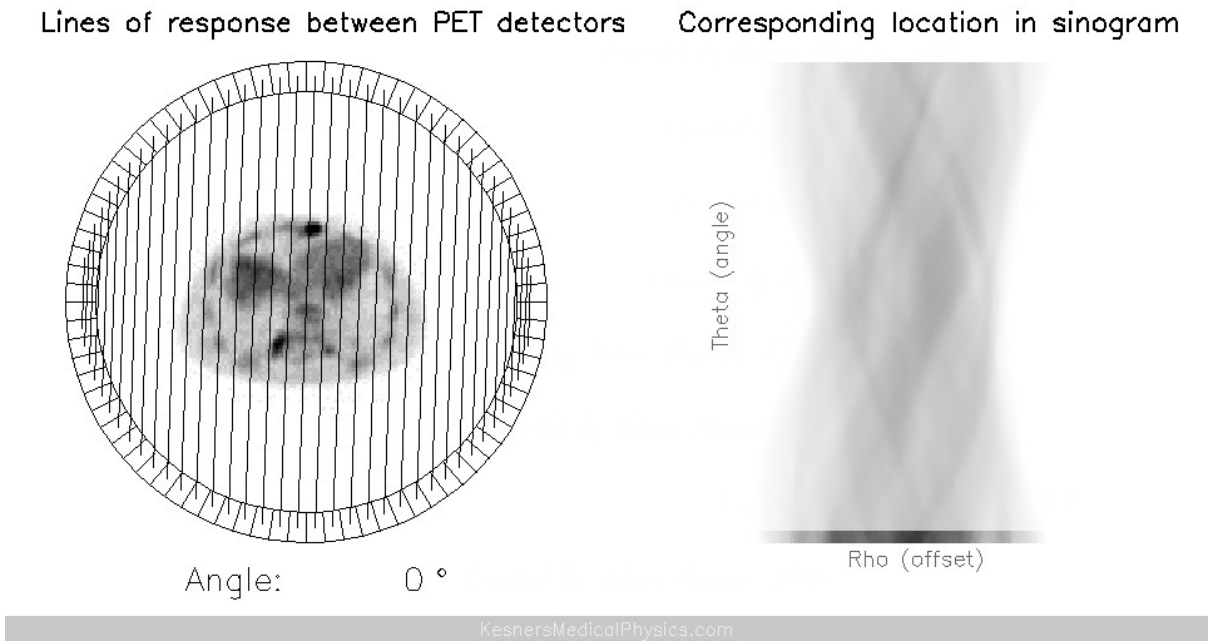
TOMOGRAPHIE PET

Pour une acquisition TEP, le patient est placé dans un anneau de détecteurs.

Contrairement au SPECT ou un scanner X, il n'y a pas de caméras ou de pièces rotatives.

Les sinogrammes sont créés de la même manière que pour la SPECT. Des profils virtuels (d'émission) par angle peuvent être générés en cartographiant et en triant les événements des paires de détecteurs (sur la base d'une matrice système fournie par le fabricant de la machine).

Le gif permet de visualiser les lignes de réponse et leur corrélation avec le sinogramme.



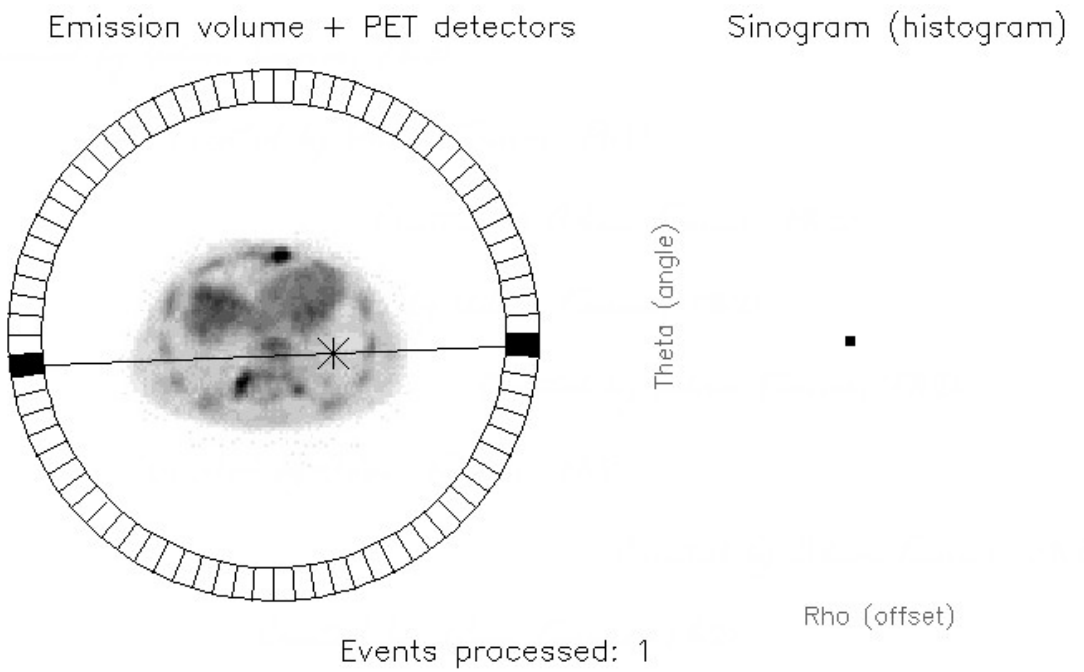
ACQUISITION PET

Les images TEP sont générées par la détection des photons de 511 keV qui apparaissent lors de l'annihilation des positons (le processus par lequel un positron se combine avec un électron, ce qui entraîne une transformation des particules avec une masse en photons (sans masse) avec de l'énergie).

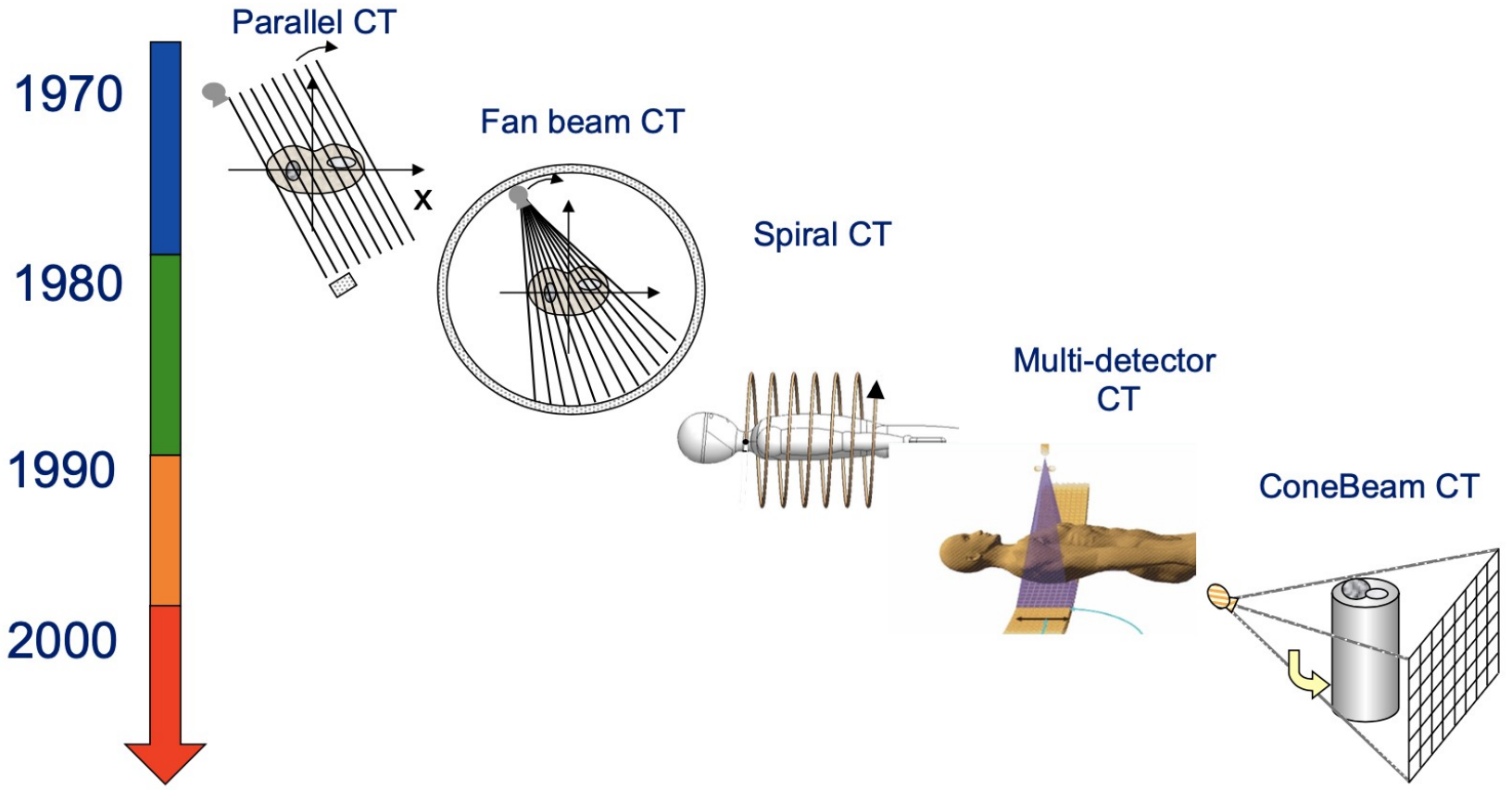
Les données sont collectées en classant chaque événement à l'endroit approprié dans l'espace sinogramme - chaque ligne de réponse a un angle et un décalage correspondants pour indiquer son emplacement dans le sinogramme.

L'animation illustre les événements d'annihilation de photons qui se produisent avec un anneau de détection PET.

Au fur et à mesure que les événements sont détectés, ils sont enregistrés dans le sinogramme du balayage. Seuls des exemples d'événements sont illustrés, car le nombre total d'événements réels serait trop important pour être affiché.

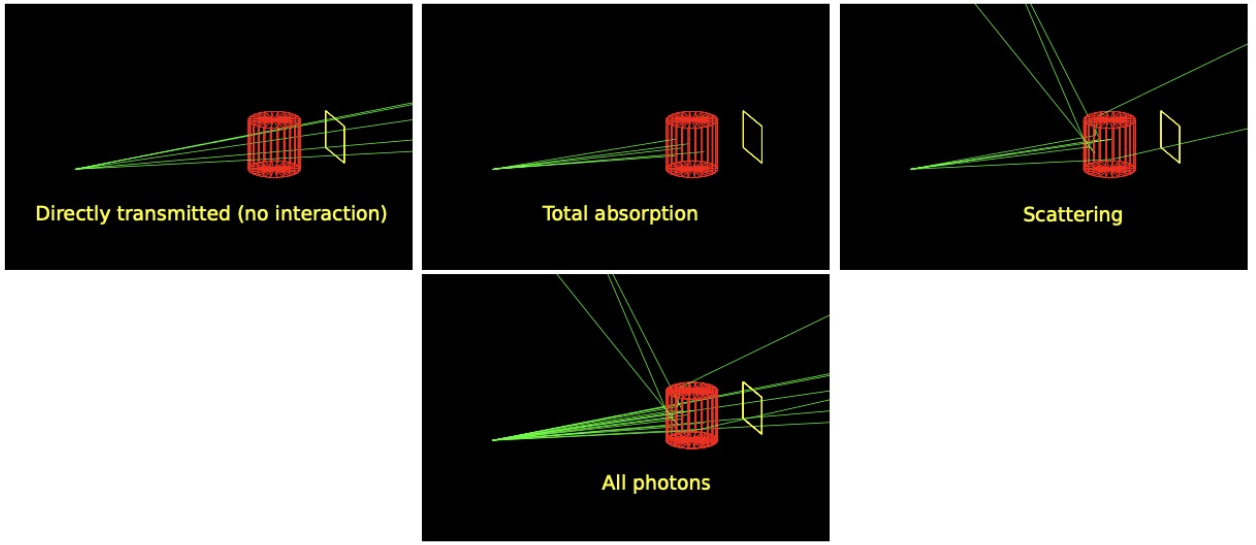


UN PEU PLUS DE GÉOMÉTRIE



BREF RAPPEL POUR LES X

Photon-matter interactions

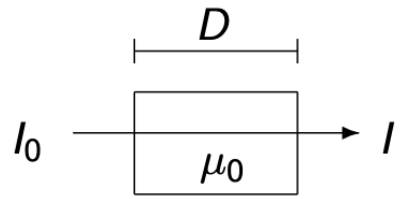


$$\frac{\text{number of photons transmitted with no interaction}}{\text{number of emitted photons}} = \textbf{Beer-Lambert attenuation law}$$

BREF RAPPEL SUR BEER LAMBERT

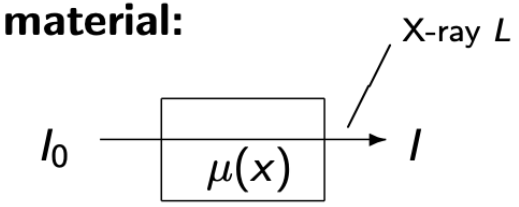
Homogeneous material:

$$I = I_0 \exp\left\{ -\mu_0 D \right\}$$



Non-homogeneous (more interesting) material:

$$I = I_0 \exp\left\{ -\int_L \mu(x)dx \right\}$$

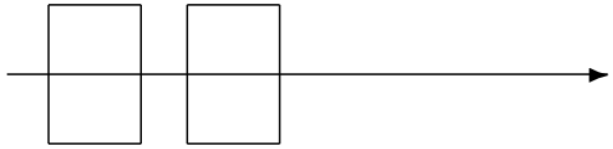
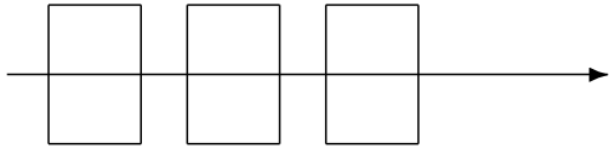
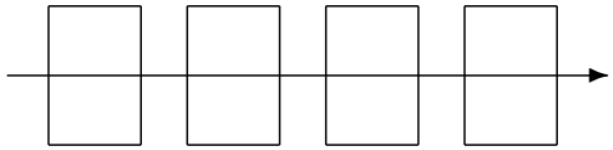


Rearrange to line integral form:

$$-\log \frac{I}{I_0} = \int_L \mu(x)dx$$

I_0 is the incident flux and $\mu(x)$ is the absorption coefficient..
I is called the *intensity*, I/I_0 is called the *transmission*, while the corresponding $-\log(I/I_0)$ is called the *absorption*.

INTENSITÉ – TRANSMISSION – ATTÉNUATION

$I_0 = 10000$	I	I/I_0	$-\log(I/I_0)$
	10000	1.0000	0.0
	5000	0.5000	0.7
	2500	0.2500	1.4
	1250	0.1250	2.1
	625	0.0625	2.8

PLAN

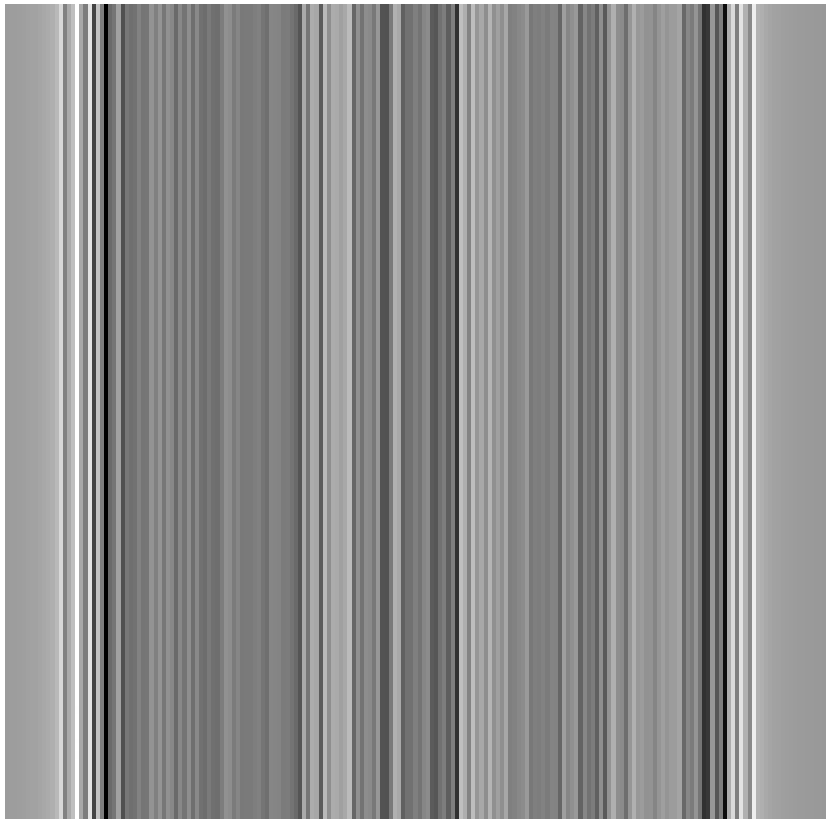
Introduction

Reconstruction Analytique

Reconstruction Itérative

Artefacts en tomographie

Conclusion

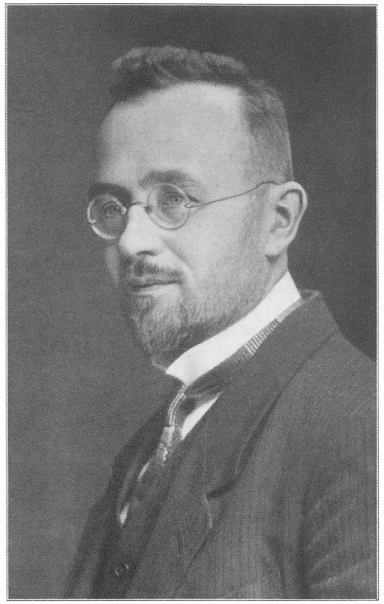


ORIGINE DE LA RECONSTRUCTION TOMO

Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten.

(Johann Radon, 1917)

Un objet peut être reconstruit parfaitement à partir d'un ensemble complet d'intégrales de lignes.



NOTATIONS

How to describe a line?

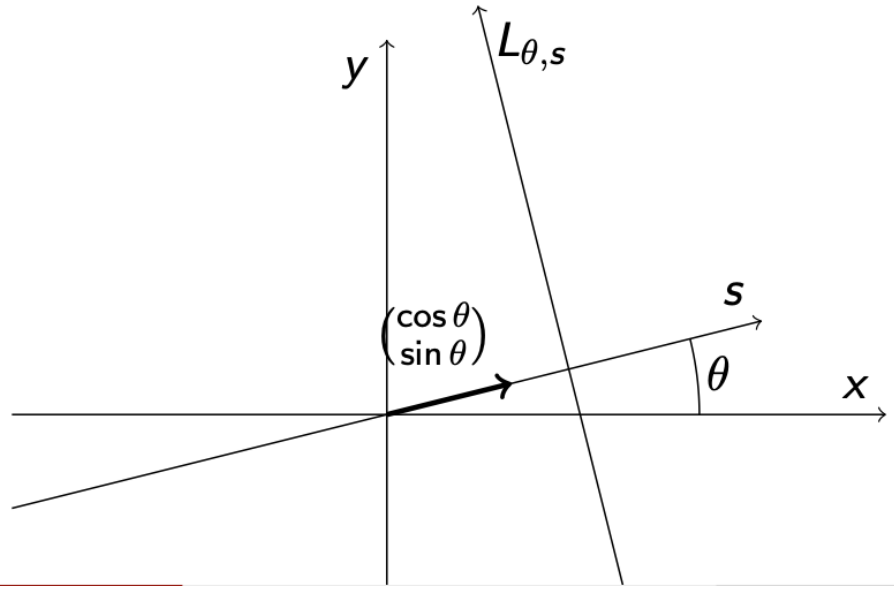
A familiar way: $y = \alpha x + \beta$. Vertical lines excluded.

Alternative: "normal form":

$$L_{\theta,s} = \{(x, y) \mid x \cos\theta + y \sin\theta = s\}$$

s is the signed orthogonal distance of line to origin

θ is the angle between the x-axis and unit normal vector to $L_{\theta,s}$



TRANSFORMÉE DE RADON POUR FAISCEAU PARALLÈLE

Object $f(x, y)$:

- contained in a unit disk of radius 1

Line of integration $L_{\theta,s}$ given by:

- θ: angle of line to be projected onto
- s: position on line

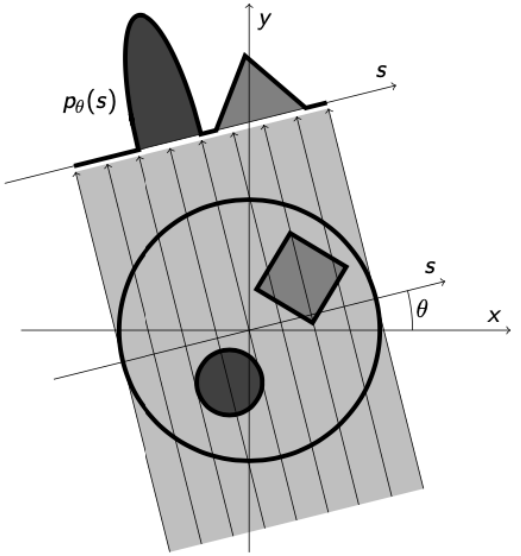
Projection: all line integrals at angle θ:

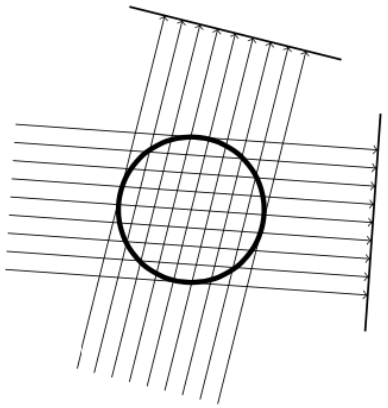
$$p_\theta(s) = \int_{L_{\theta,s}} f(x, y)\, d\ell \quad \text{for} \quad s \in [-1, 1].$$

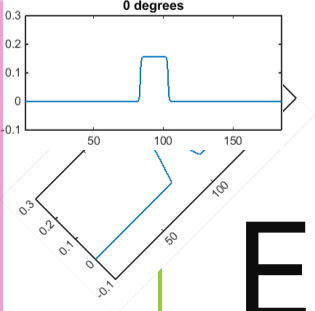
The Radon transform is:

$$[\mathcal{R}f](\theta, s) = p_\theta(s) = \int_{L_{\theta,s}} f(x, y)\, d\ell$$

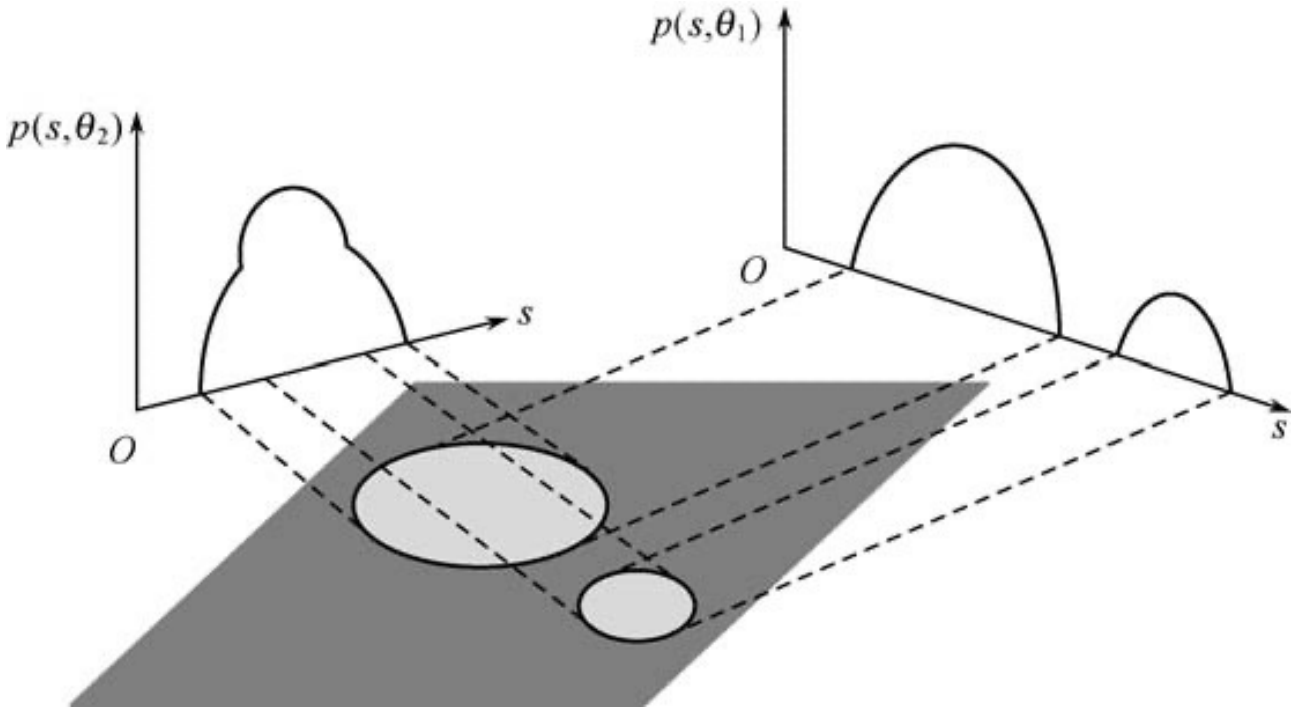
for $\theta \in [0°, 360°[$ and $s \in [-1, 1]$.

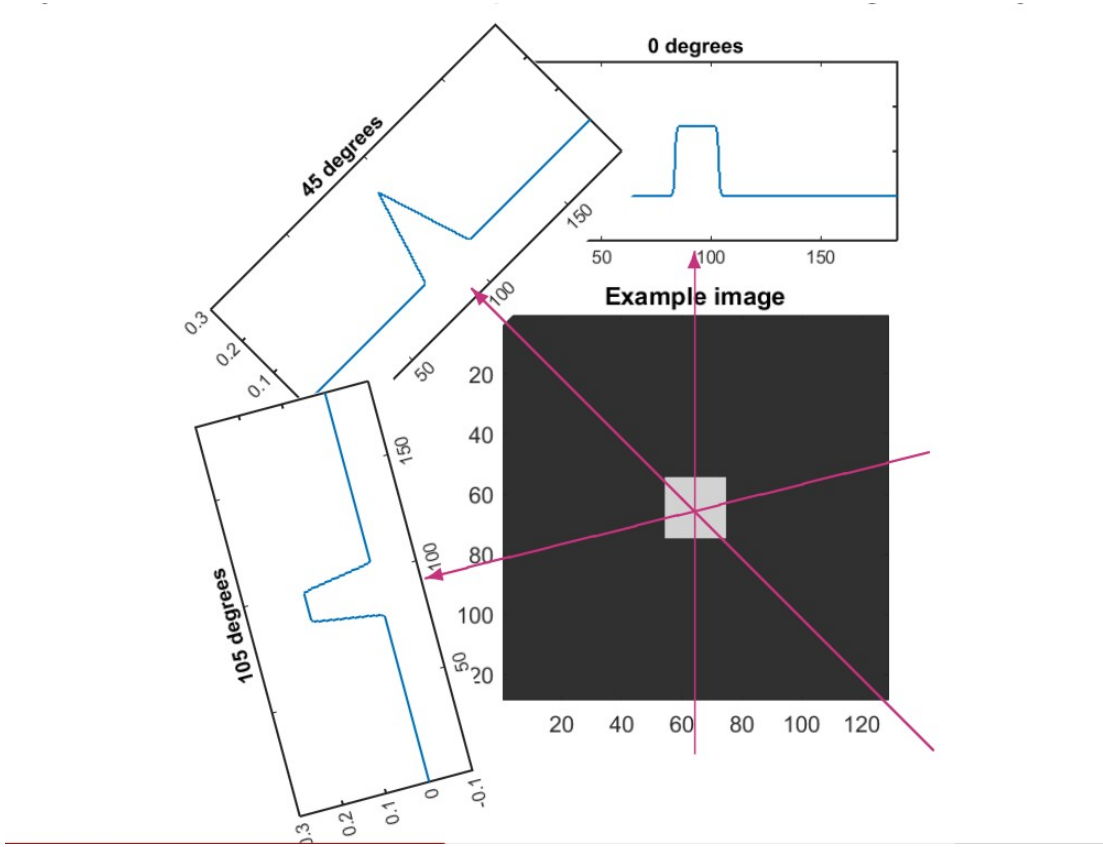






EXEMPLES

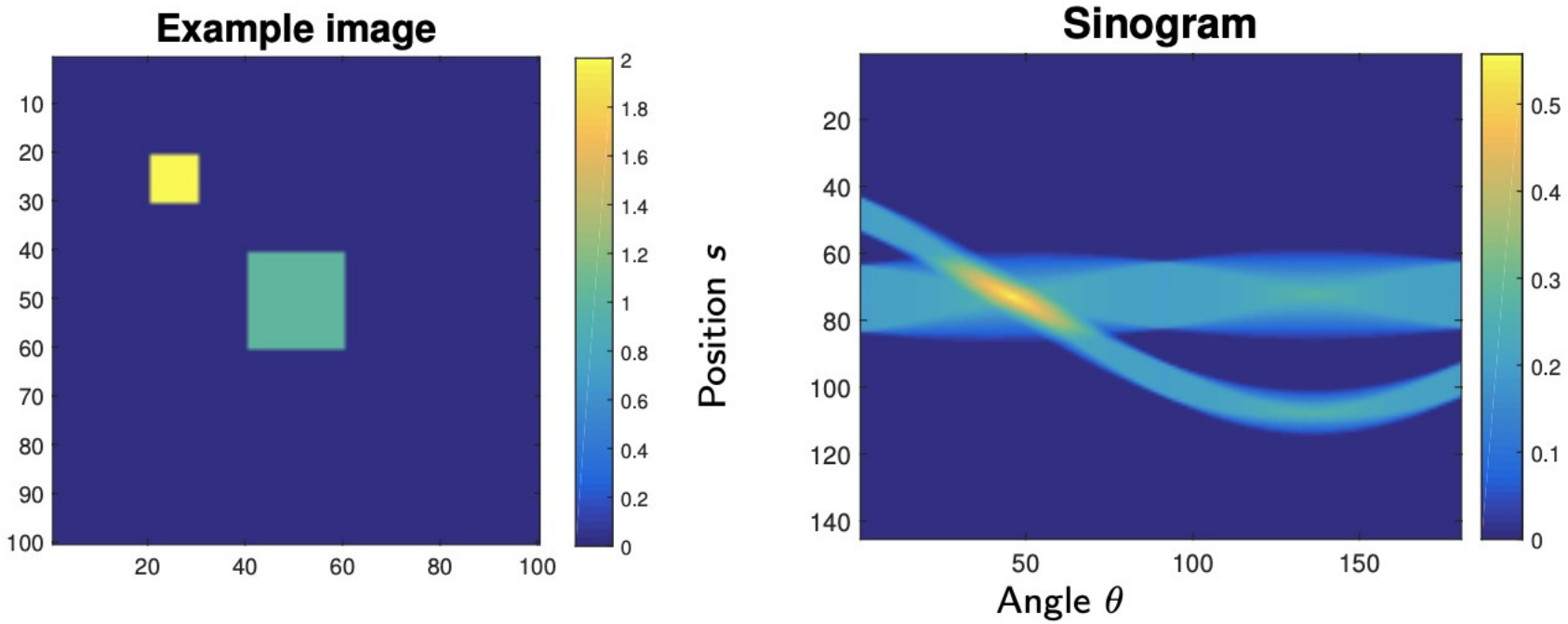




G.L. Zeng. Medical Image Reconstruction. Springer, 2010.

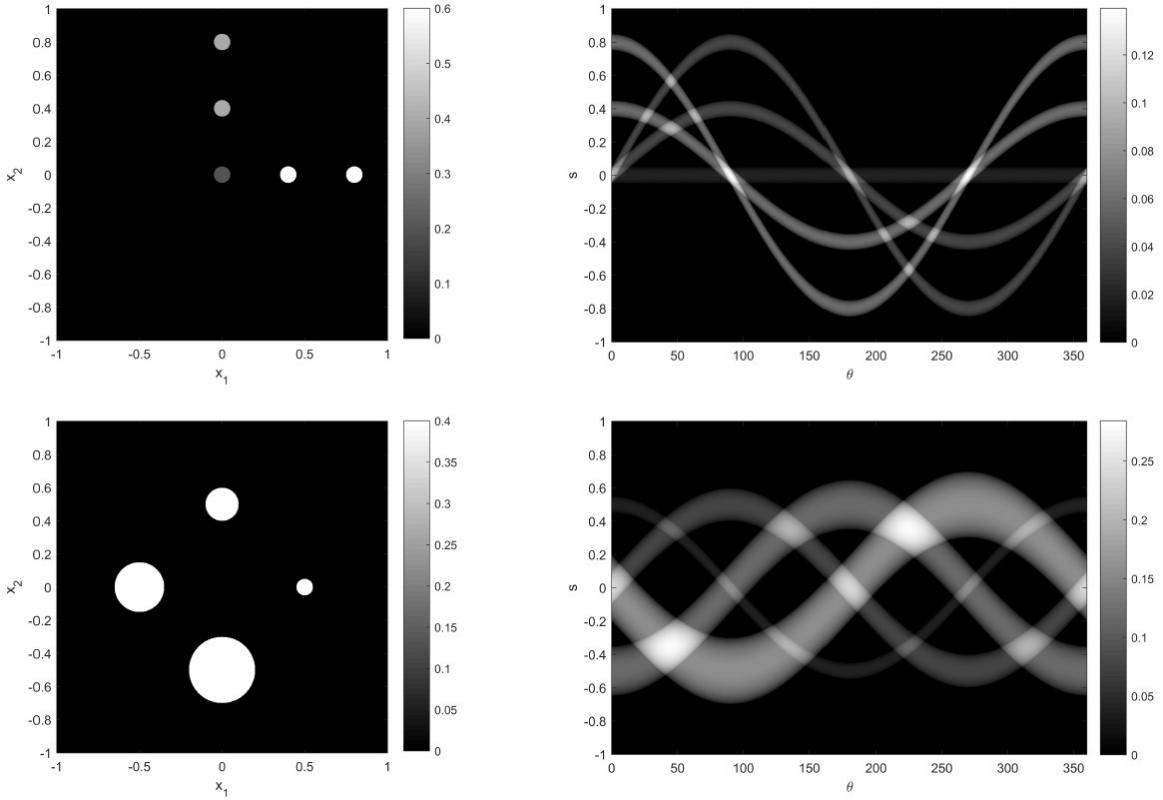
Courtesy of Jakob Sauer Jorgensen

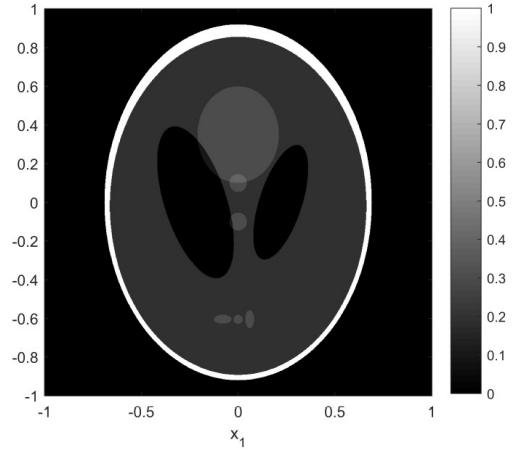
IMAGE ET TRANSFORMÉE DE RADON

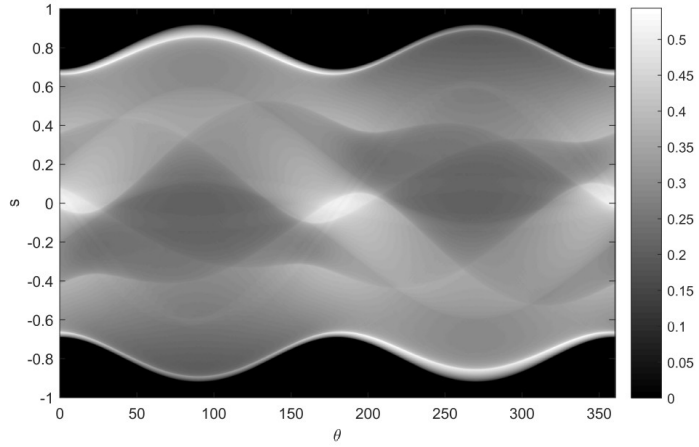


En géométrie parallèle pas besoin d'acquérir sur 2π

EXEMPLES DE SINOGRAMES







Fantome Shepp-Logan :
Superposition d'ellipses, simulant la coupe transversale d'une tête humaine.

CONNEXION TRANSFORMÉE DE RADON & BEER-LAMBERT

The Radon transform

$$p_\theta(s) = \int_{L_{\theta,s}} f(x,y)\, d\ell$$

and the Lambert-Beer law along the same line $L_{\theta,s}$

$$I_{\theta,s} = I_0 \exp\left(-\int_{L_{\theta,s}} \mu(x,y)\, d\ell\right)$$

are connected through the identifications

$$f(x,y) = \mu(x,y)$$

$$p_\theta(s) = -\log\left(\frac{I_{\theta,s}}{I_0}\right)$$

FORME PARAMÉTRIQUE DE LA TRANSFORMÉE DE RADON

The Radon transform

$$p_\theta(s) = \int_{L_{\theta,s}} f(x,y)\, d\ell$$

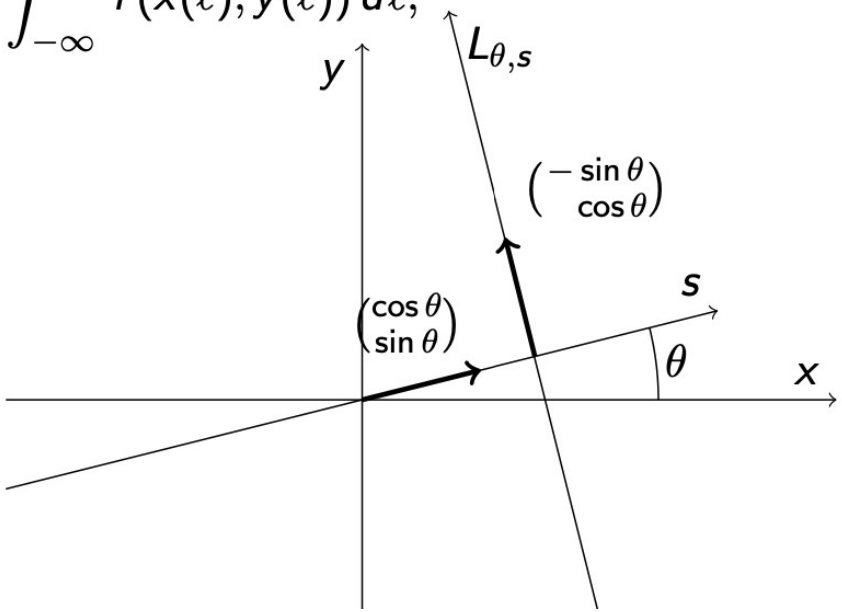
can be written explicitly using a parametrization of the line $L_{\theta,s}$

$$p_\theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(\ell), y(\ell))\, d\ell,$$

where at fixed θ and s:

$$x(s) = s\cos\theta - \ell\sin\theta$$
$$y(s) = s\sin\theta + \ell\cos\theta$$

The line $L_{\theta,s}$ is traced as ℓ runs from $-\infty$ to ∞.



UNE FORME PRATIQUE POUR RÉÉCRIRE LA TRANSFORMÉE DE RADON

Dirac Function

A generalized function – or distribution – with heuristic definition:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{for} \quad t = 0 \\ 0 & \text{for} \quad t \neq 0 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \ .$$

Important property of Dirac delta function:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t - T)\,dt = f(T) \ .$$

This is called the *sifting property*: the Dirac delta function acts as a sieve and "sifts out" (or "samples") the value of f at $t = T$.

Useful alternative expression for the Radon transform
we need it later

$$p_\theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)\,dx\,dy \ .$$

Interpretation:
The line $L_{\theta,s}$ consists of exactly those (x, y) at which

$$x\cos\theta + y\sin\theta - s = 0 \ ,$$

which is the argument of the Dirac delta function δ.

Thus, the integrand is restricted to function values of $f(x, y)$ on $L_{\theta,s}$, which amounts to the corresponding line integral.

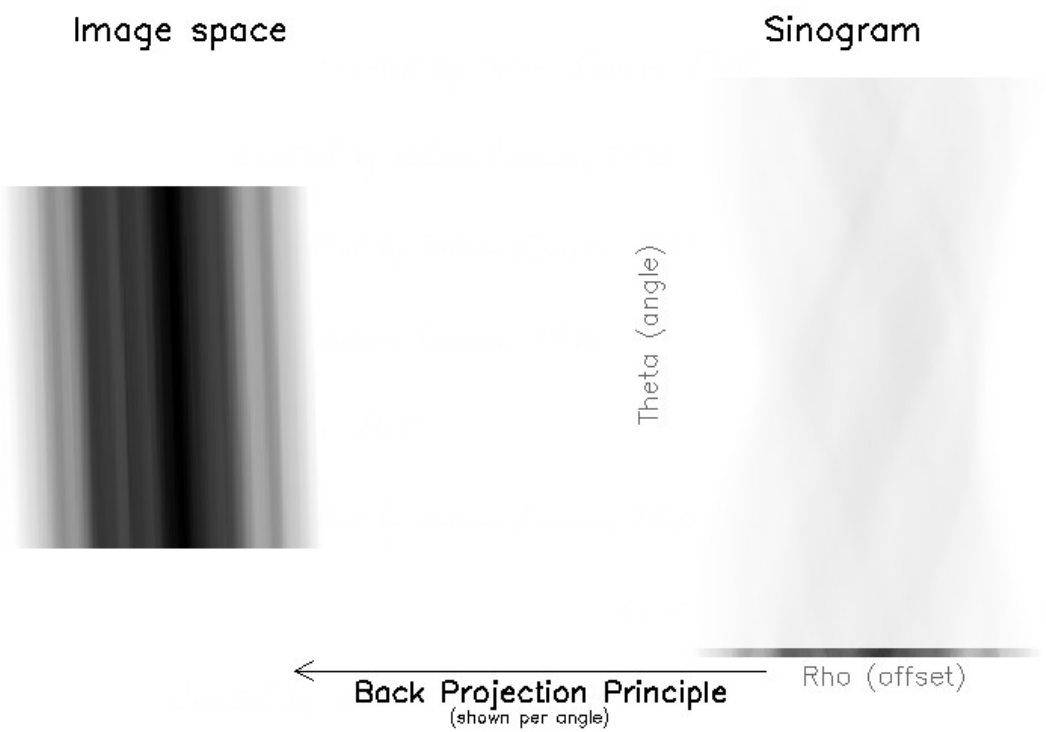
LA RÉTROPROJECTION

On peut écrire la rétroprojection comme: $$f(x,y) = \int_0^{\pi} q_\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

La rétroprojection est un processus qui consiste à "étaler" le profil mesuré associé à chaque angle d'acquisition spécifique dans l'espace de l'image.

Chaque profil de projection du sinogramme (initialement créé et stocké dans le sinogramme lors de l'acquisition de l'image) peut être rétroprojeté à l'angle auquel il a été acquis.

L'animation illustre comment les informations stockées à chaque angle du sinogramme sont rétroprojetées dans l'espace de l'image.



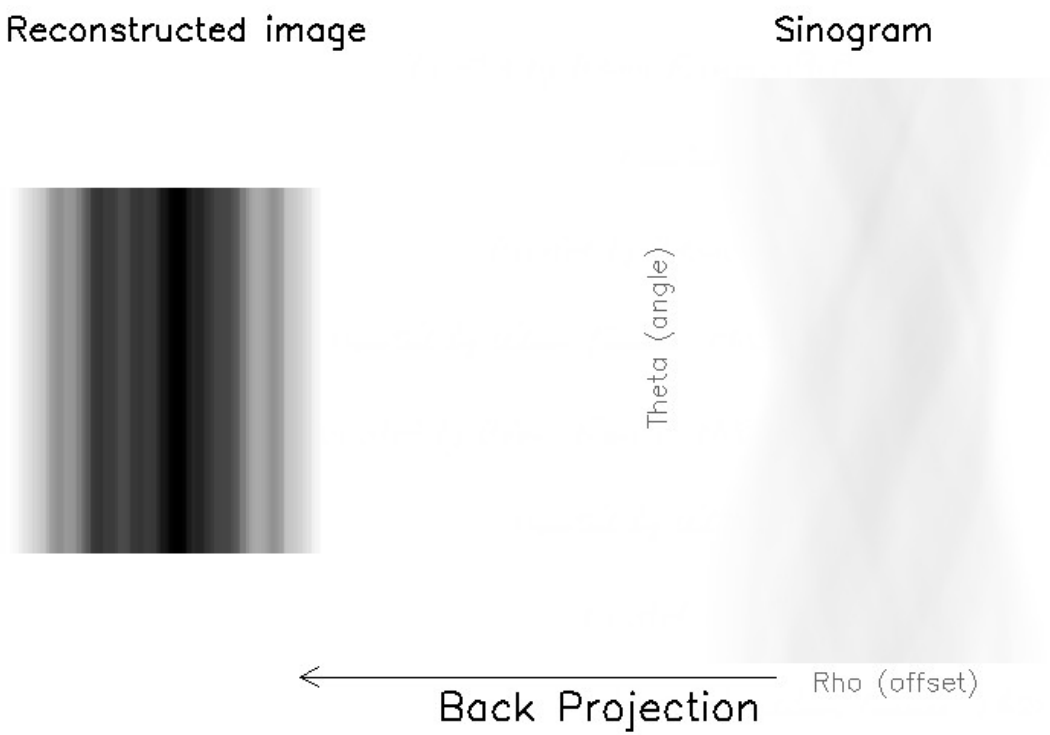
RÉTROPROJECTION

Lorsque nous reconstruisons une image, nous rétroprojetons plus d'un angle à la fois - plus précisément, nous rétroprojetons TOUS les angles et additionnons leurs rétroprojections dans l'espace de l'image.

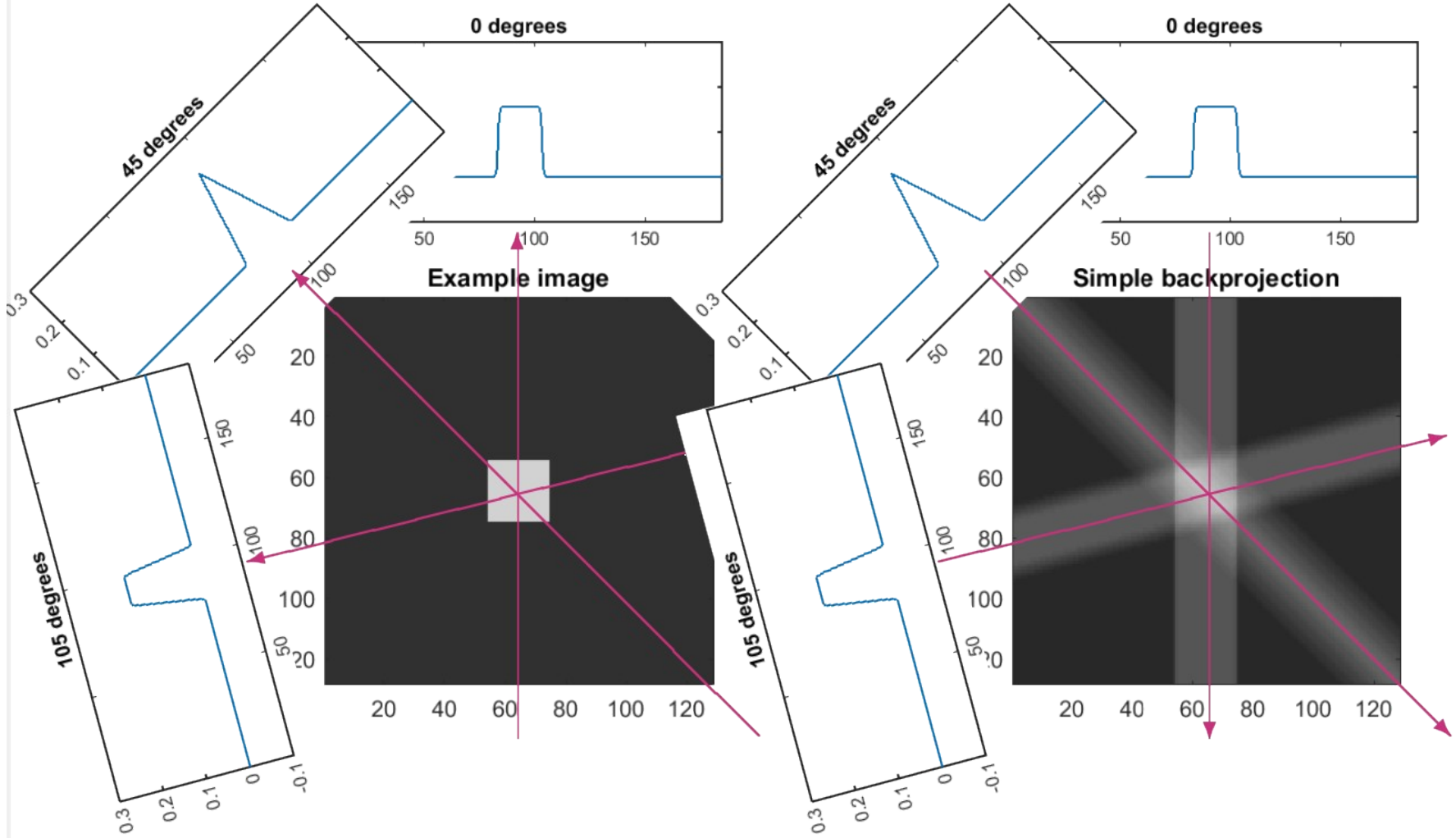
L'animation montre comment plusieurs angles du sinogramme peuvent être rétroprojetés ensemble pour créer une image rétroprojetée.

La rétroprojection seule est une stratégie de reconstruction d'image inadéquate, car nous nous retrouvons avec une représentation floue de l'image (comme on le voit).

Le flou qui se produit lors de la rétroprojection est appelé "flou 1/r".

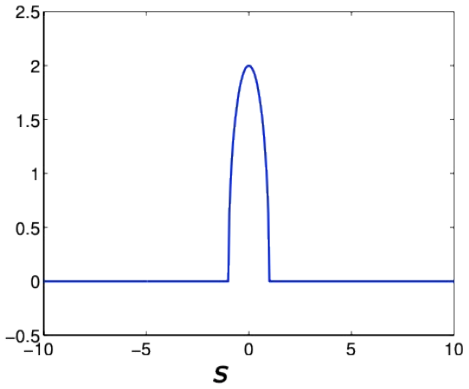


RÉTROPROJECTION: UN AUTRE EXEMPLE



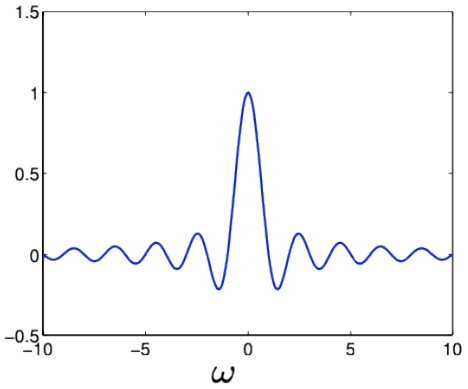
AND NOW LADIES AND GENTLEMEN: LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

Fourier transform ("Frequency representation"):

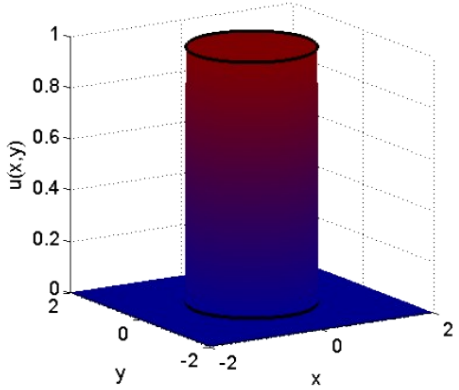


1D Fourier transform $\mathcal{F}_1$

1D Inverse Fourier transform $\mathcal{F}_1^{-1}$

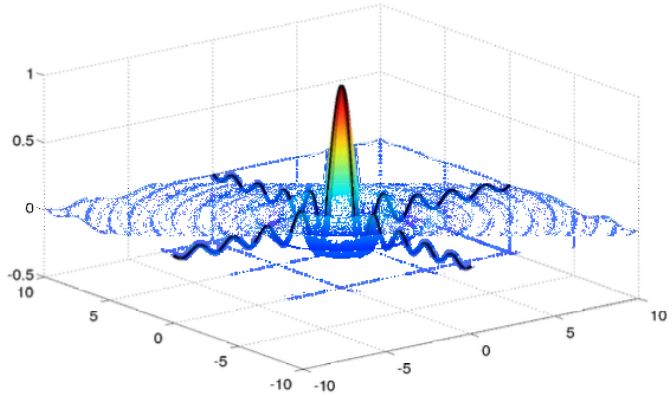


Also possible for functions of more than 1 variable:



2D Fourier transform $\mathcal{F}_2$

2D Inverse Fourier transform $\mathcal{F}_2^{-1}$



UN PETIT RAPPEL

1D Fourier transform and inverse:

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}_1[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}_1^{-1}[\widehat{f}(\omega)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{+j2\pi\omega t}\, d\omega$$

2D Fourier transform and inverse:

$$F(u,v) = \mathcal{F}_2[f(x,y)](u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-j2\pi(ux+yv)}\, dx\, dy$$

$$f(x,y) = \mathcal{F}_2^{-1}[F(u,v)](x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\, e^{+j2\pi(ux+yv)}\, du\, dv$$

THÉOREME DE LA COUPE DE FOURIER

Strategy: Manipulate 1D Fourier-transformed projection into slice through 2D Fourier-transformed image.

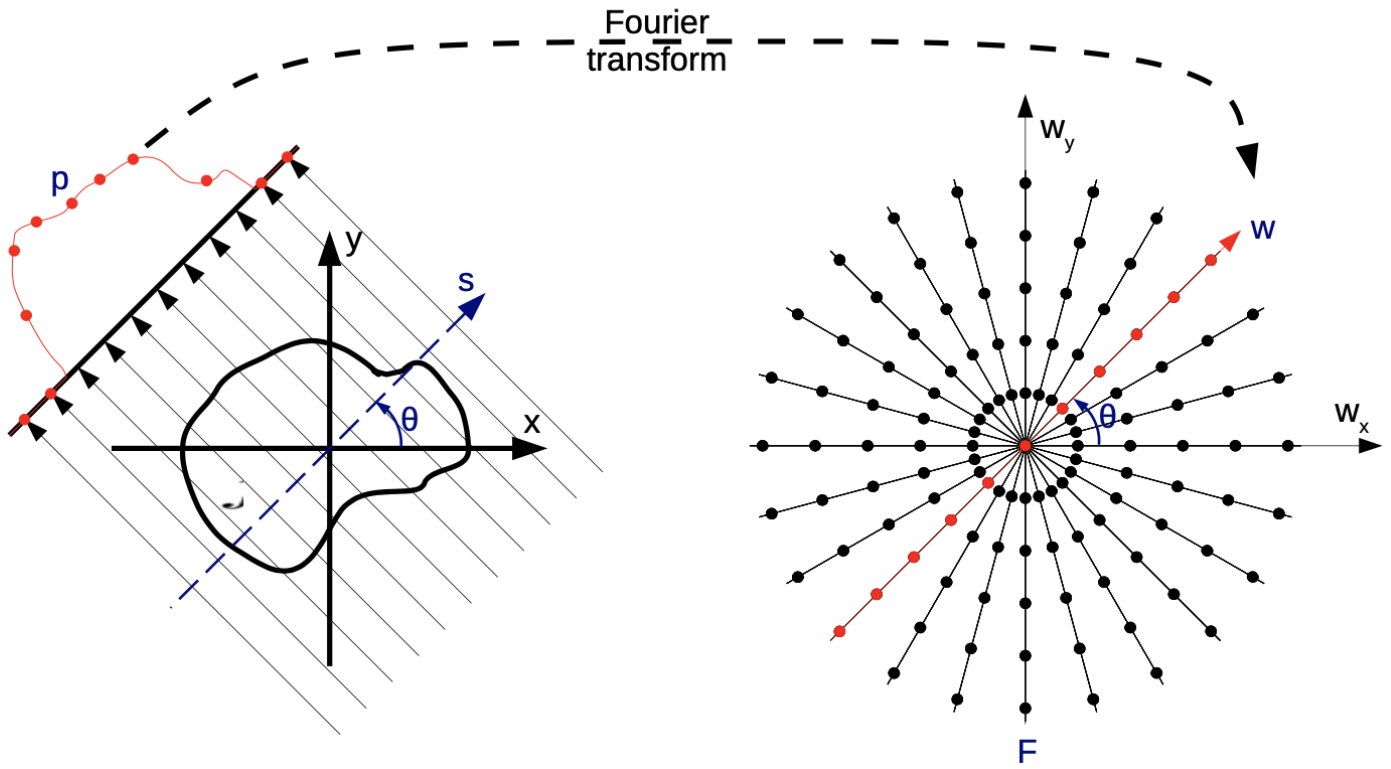
$$
\begin{aligned}
\widehat{p_\theta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(s)\, e^{-j2\pi\omega s}\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, \delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)\, e^{-j2\pi\omega s}\, dx\, dy\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \int_{-\infty}^{\infty} \delta((x\cos\theta + y\sin\theta) - s)\, e^{-j2\pi\omega s}\, ds\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s - (x\cos\theta + y\sin\theta))\, e^{-j2\pi\omega s}\, ds\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy\ . \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-j2\pi(xu+yv)}\, dx\, dy \Big|_{u=\omega\cos\theta, v=\omega\sin\theta} \\
&= F(u,v)\Big|_{u=\omega\cos\theta, v=\omega\sin\theta}
\end{aligned}
$$

Théorème coupe de Fourier

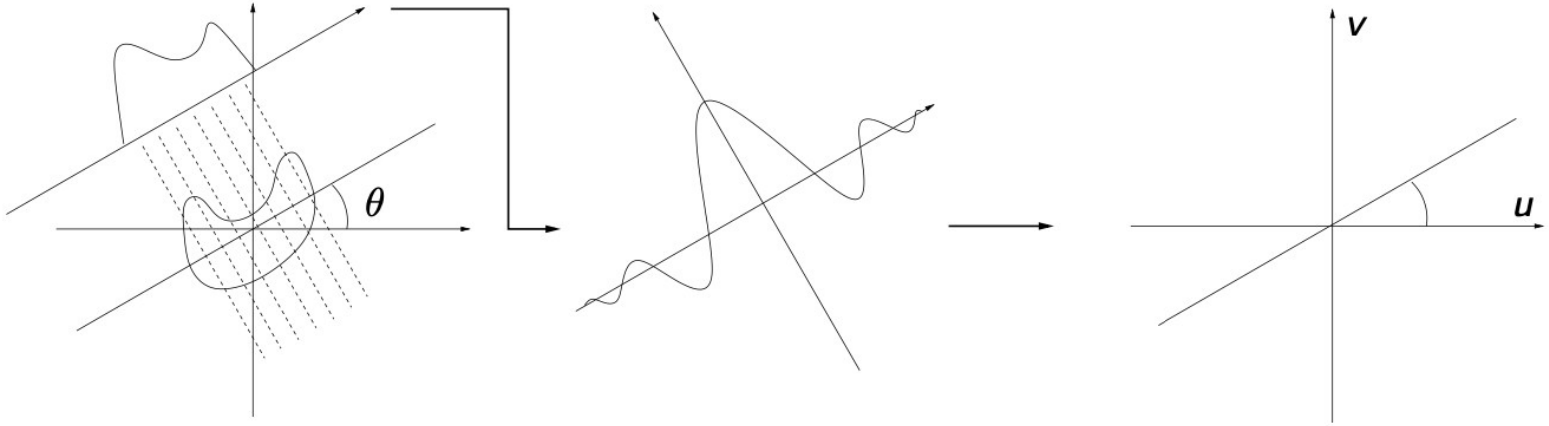
$$P_\theta(w) = F(w\cos\theta\,, w\sin\theta)$$

LIEN ESPACE DE FOURIER - PROJECTION

Théorème coupe de Fourier $P_\theta(w) = F(w\cos\theta\,, w\sin\theta)$



LIEN ESPACE DE FOURIER - PROJECTION

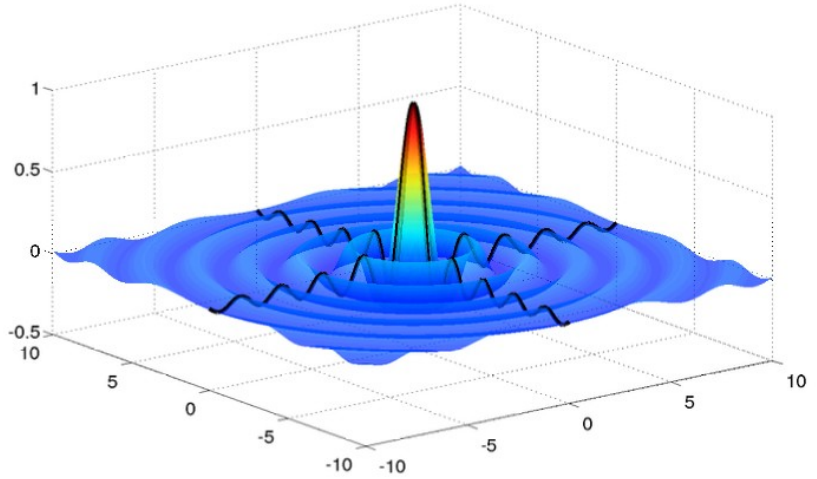


Projection at angle θ 1D Fourier transform At angle θ in Fourier space

All 1D Fourier transformed projections

=

2D Fourier transform



POURQUOI ON NE RECONSTRUIT PAS AVEC LA TRANSFORMÉE INVERSE DE FOURIER?

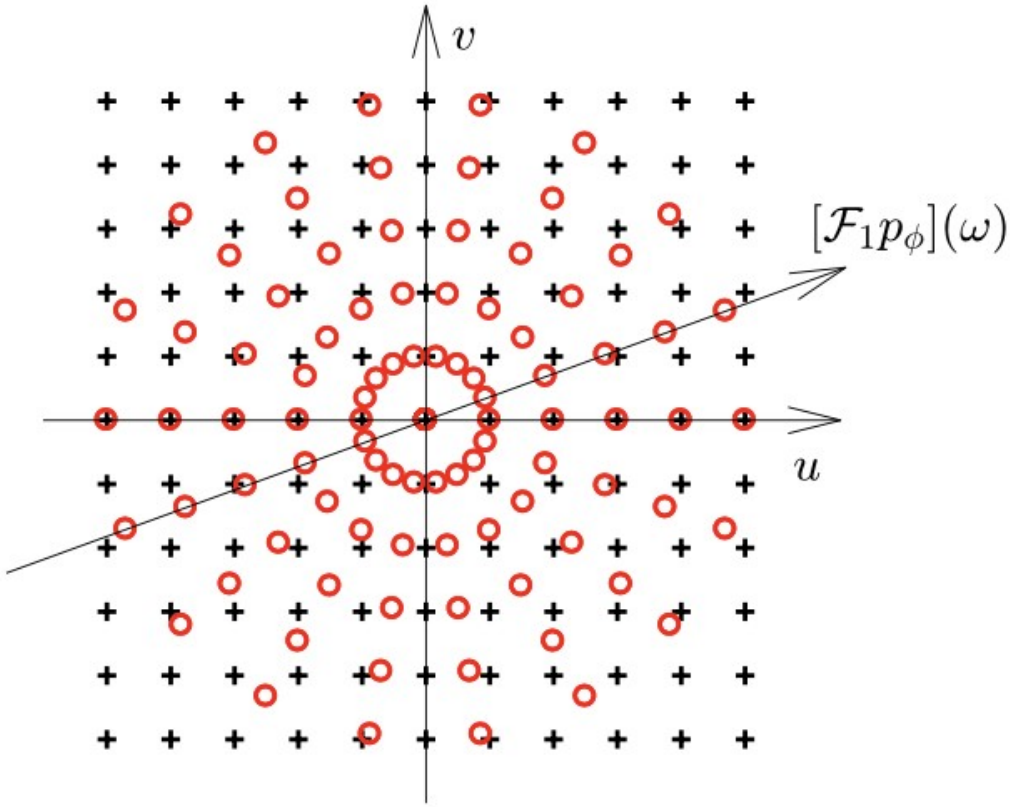
En pratique, nous ne disposons pas de tous les θ et s puisque nous enregistrons un nombre fini de projections avec un détecteur de taille fixe.

L'interpolation de la grille polaire à la grille cartésienne, connue sous le nom de "regridding", est nécessaire pour la transformée de Fourier inverse en 2D

Interpolation précise dans le domaine de Fourier difficile.

La transformée de Fourier a besoin de toutes les données simultanément.

Résultat : La méthode de Fourier est rarement utilisée dans la pratique.



RETROPROJECTION FILTRÉE

Derive Filtered Back-Projection, Part 1

Strategy: Rewrite inverse 2D Fourier transform:

$$f(x,y) = \mathcal{F}_2^{-1}[\mathcal{F}_2 f]$$

[2D Fourier transform definitions]

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\, e^{j2\pi(ux+vy)}\, du\, dv$$

[Change to polar coordinates, including Jacobian ω]

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)\, e^{j2\pi(\omega\cos\theta x+\omega\sin\theta y)}\, \omega\, d\omega\, d\theta$$

[Split integral over 2π in two:]

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)\, e^{j2\pi(\omega\cos\theta x+\omega\sin\theta y)}\, \omega\, d\omega\, d\theta +$$
$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega\cos(\theta+\pi), \omega\sin(\theta+\pi))\, e^{j2\pi(\omega\cos(\theta+\pi)x+\omega\sin(\theta+\pi)y)}\, \omega\, d\omega\, d\theta$$

RETROPROJECTION FILTRÉE

Derive Filtered Back-Projection, Part 2

[Using $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$ and $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$:]

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)\, e^{j2\pi(\omega\cos\theta x + \omega\sin\theta y)}\, \omega\, d\omega\, d\theta$$
$$+ \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F(-\omega\cos\theta, -\omega\sin\theta)\, e^{j2\pi(-\omega\cos\theta x - \omega\sin\theta y)}\, \omega\, d\omega\, d\theta$$

[Change sign/bounds in second integral:]

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)\, e^{j2\pi(\omega\cos\theta x + \omega\sin\theta y)}\, \omega\, d\omega\, d\theta$$
$$+ \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{0} F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)\, e^{j2\pi(\omega\cos\theta x + \omega\sin\theta y)}\, (-\omega)\, d\omega\, d\theta$$

Collect the two integrals using absolute value:

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)\, e^{j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, |\omega|\, d\omega\, d\theta$$

RETROPROJECTION FILTRÉE

Derive Filtered Back-Projection, Part 3

[Apply Fourier Slice Theorem:]

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{p_\theta}(\omega)\, e^{j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, |\omega|\, d\omega\, d\theta$$

[Use that $x\cos\theta + y\sin\theta$ is constant wrt ω-integration, say s]

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{p_\theta}(\omega)\, e^{j2\pi\omega s}\, |\omega|\, d\omega \right]_{s = x\cos\theta + y\sin\theta} d\theta.$$

Recognizing the inner integral as 1D inverse Fourier transform, we define the *filtered projection*:

$$q_\theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{p_\theta}(\omega)\, e^{j2\pi\omega s}\, |\omega|\, d\omega$$
$$= \mathcal{F}_1^{-1}\left[\widehat{p_\theta}(\omega)\, |\omega|\right](s) = \mathcal{F}_1^{-1}\left[\mathcal{F}_1[p_\theta](\omega)\, |\omega|\right](s)$$

Projections are filtered by multiplying with the ramp filter $|\omega|$ in the Fourier domain.

RETROPROJECTION FILTRÉE

Derive Filtered Back-Projection, Part 4

Finally we can write

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} q_\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)\,d\theta = \mathcal{B}[q_\theta](x,y)$$

by recognizing the back-projection operation.

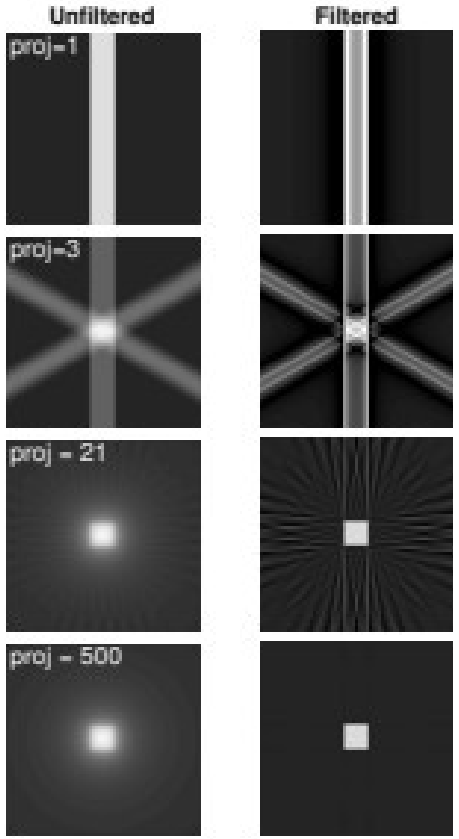
This is the Filtered Back-Projection (FBP) inversion formula for the Radon transform.

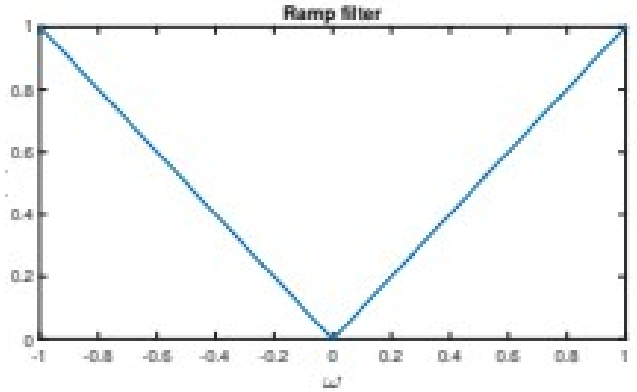
Interpretation:

At each point (x,y) in the image f to be reconstructed, each angle θ defines a sinogram location $s = x\cos\theta + y\sin\theta$.

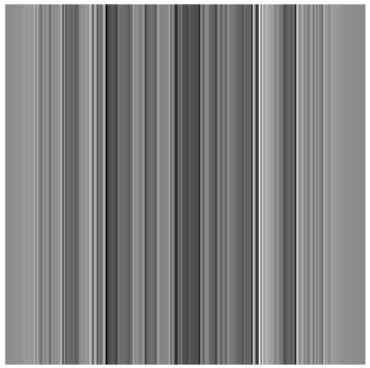
Through back-projection, the point (x,y) is assigned the singram's value at s via the filtered projection, and contributions at all angles θ are summed up.

RETROPROJECTION FILTRÉE

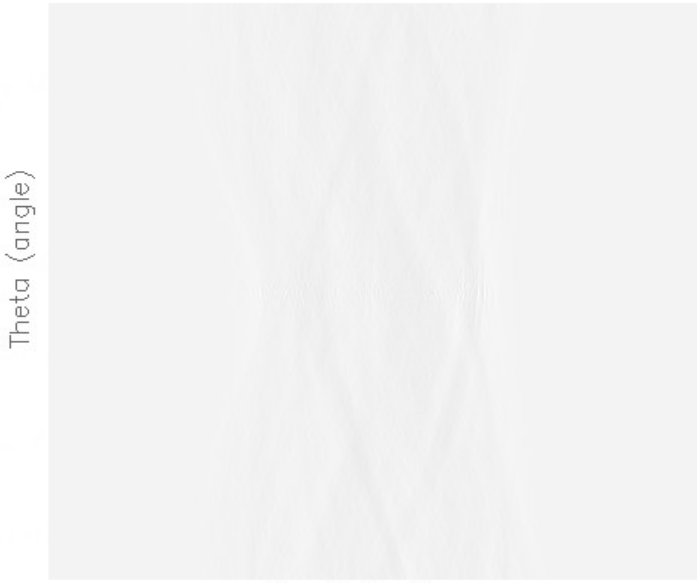




Reconstructed image



Filtered Sinogram

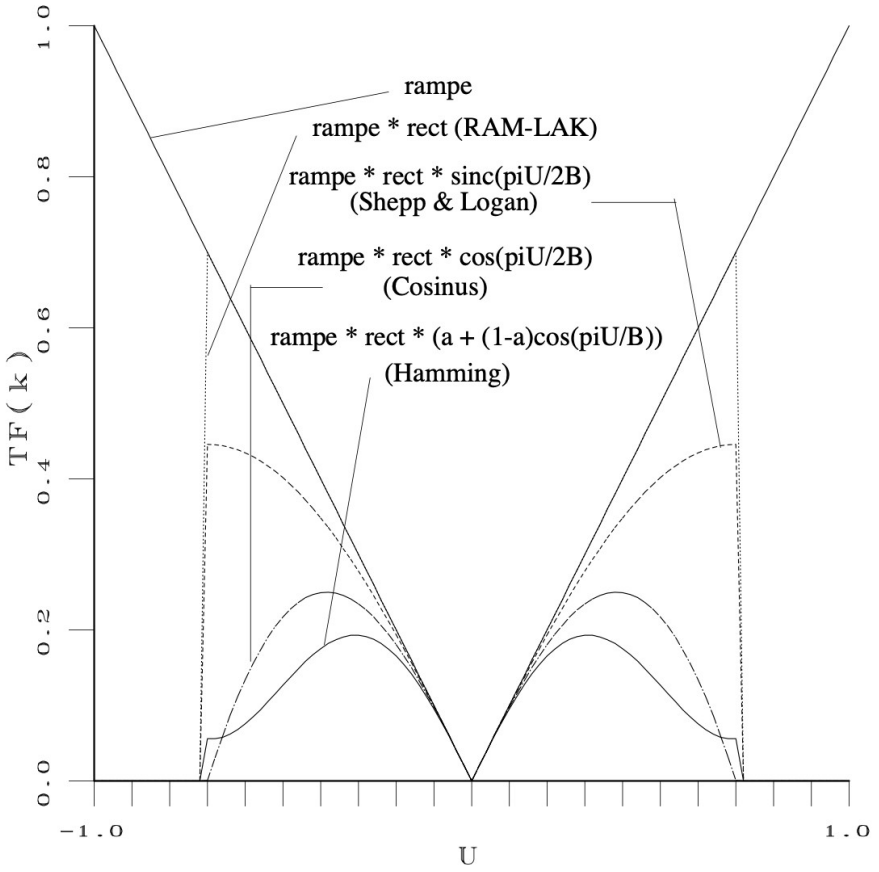


Filtered Back Projection

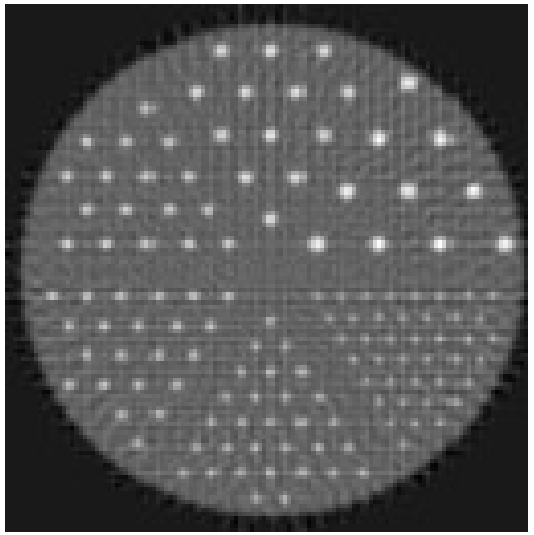
QUELQUES MOTS SUR LES FILTRES

Le filtre de rampe fait partie de la formule d'inversion, mais il s'agit d'un filtre passe-haut qui pose des problèmes dans la pratique en présence de bruit.

En pratique, des filtres passe-bas supplémentaires φLP(ω) sont utilisés ; ils sont multipliés par |ω| dans le domaine des fréquences :

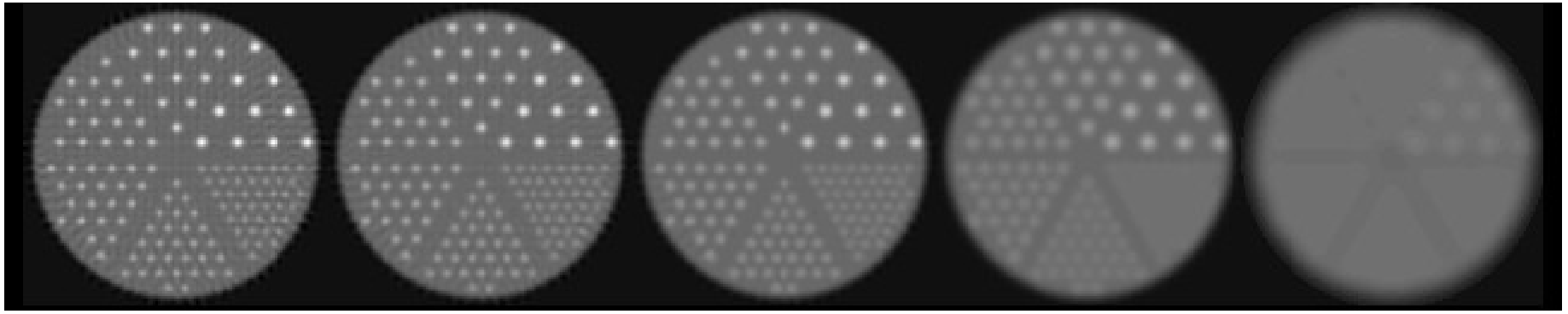


FILTRES



Rampe = Amplification du bruit à haute fréquence

ρ_c= 0.5 ρ_c= 0.4 ρ_c= 0.3 ρ_c= 0.2 ρ_c= 0.1



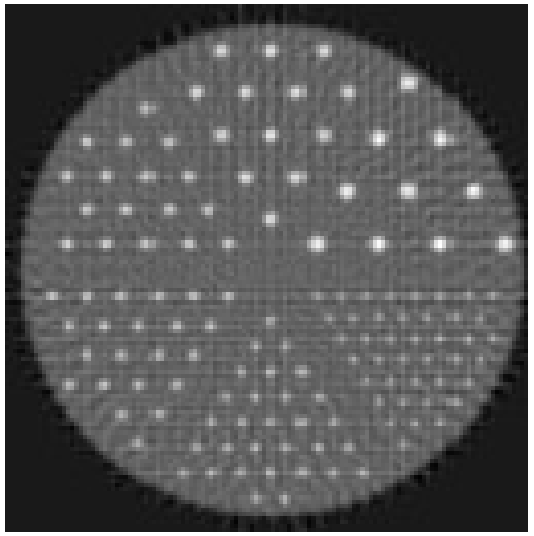
Hann

$w(\rho) = 0{,}5.(1+\cos\pi\rho/\rho c)$ si $\rho < \rho_c$

$= 0$ si $\rho \geq \rho_c$

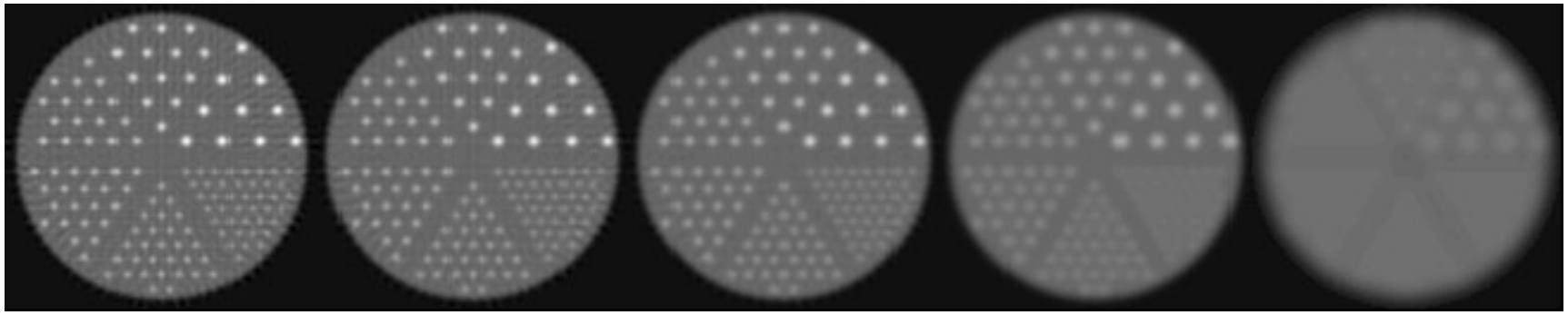
plus faible est la fréquence de coupure, moins on préserve les détails "haute fréquence", i.e., plus fort est le lissage

FILTRES



Rampe = Amplification du bruit à haute fréquence

ρ_c= 0.5 ρ_c= 0.4 ρ_c= 0.3 ρ_c= 0.2 ρ_c= 0.1



Hamming

$w(\rho) = 0{,}54+0{,}46(\cos\pi\rho/\rho c)$ si $\rho < \rho_c$

$= 0$ si $\rho \geq \rho_c$

plus faible est la fréquence de coupure, moins on préserve les détails "haute fréquence", i.e., plus fort est le lissage

ALGORITHME DE LA RETROPROJECTION FILTRÉE

Pour calculer l'image reconstruite FBP à partir des projections :

1 Transformation de Fourier de chaque projection (transformée de Fourier 1D).

2 Appliquer un filtre à rampe par multiplication avec un filtre ramp$|\omega|$

3 Appliquer éventuellement un filtre passe-bas supplémentaire $\varphi LP(\omega)$ pour traiter le bruit.

4 Transformation de Fourier inverse pour obtenir des projections filtrées.

5 Rétro-projeter les projections filtrées et faire la somme.

En pratique :

Souvent effectué automatiquement par le scanner/l'instrument. Des implémentations FBP sont disponibles.

Facile à utiliser : la principale entrée de l'utilisateur est le choix du filtre passe-bas.

BILAN SUR LA FBP

Points forts :

Rapide : Basé sur la FFT et une seule rétroprojection. Peu de paramètres à régler.

Conceptuellement facile à comprendre et à mettre en œuvre. Comportement de reconstruction bien compris.

Fonctionne généralement très bien (pour des données complètes et de bonne qualité).

Faiblesses :

Grand nombre de projections nécessaires.

Toute la gamme angulaire est nécessaire.

Seule une quantité modeste de bruit dans les données peut être tolérée.

Géométries de balayage fixes - d'autres nécessitent leurs propres formules d'inversion. Impossibilité d'utiliser des connaissances préalables telles que la non-négativité.

PLAN

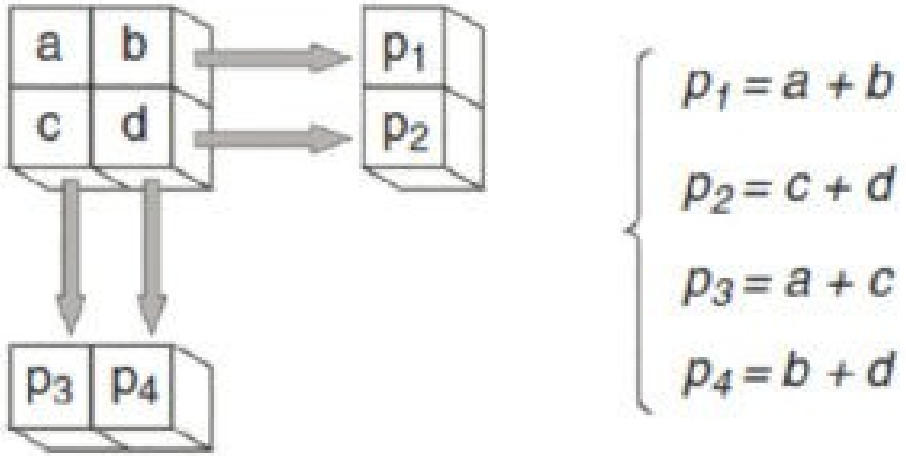
Introduction

Reconstruction Analytique

Reconstruction Itérative

Artefacts en tomographie

Conclusion

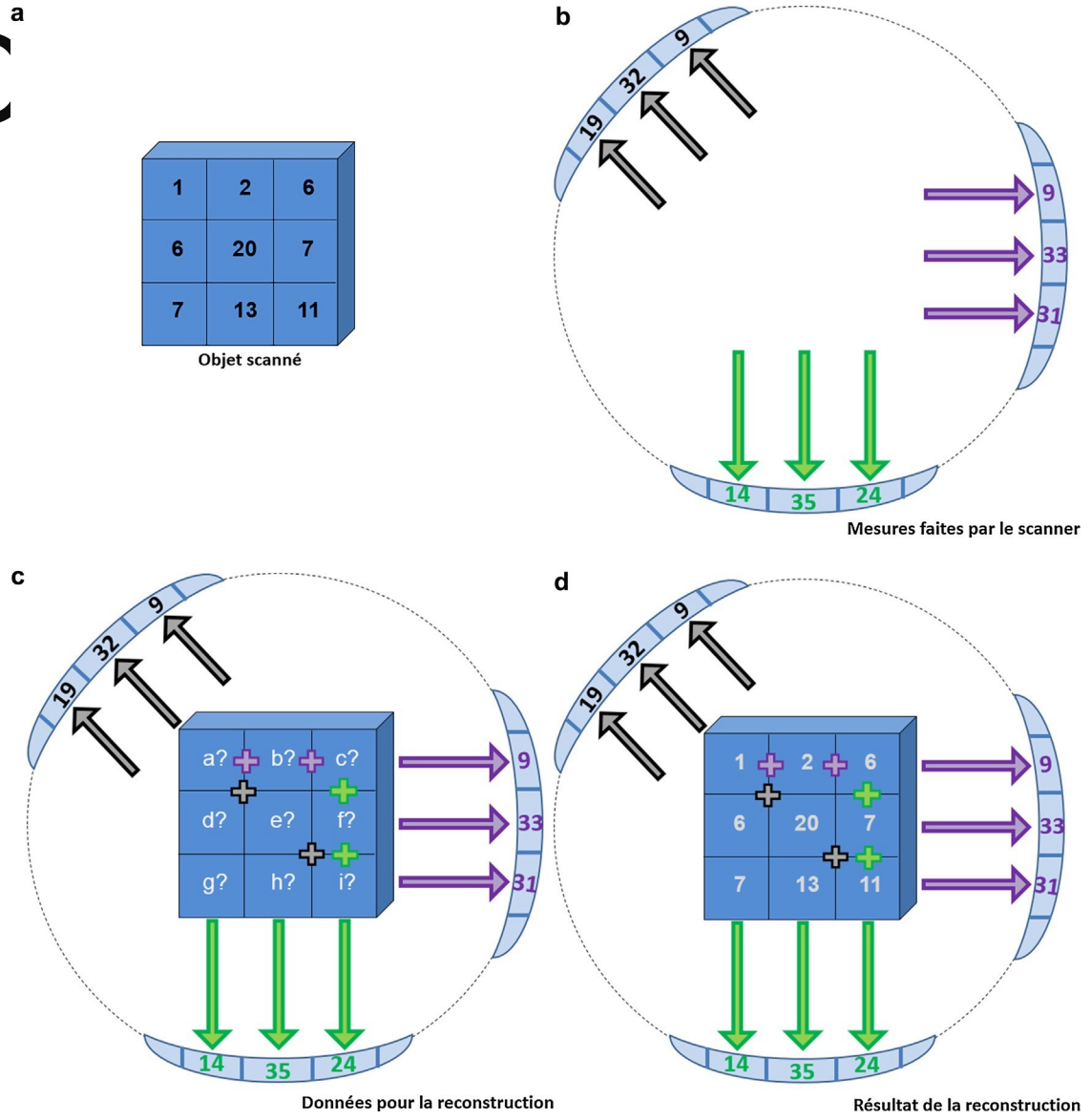


UN PROBLÈME D

Au lieu de trouver une solution continue, le problème est discrétisé.

L'image recherchée est une image discrète $f \in R^N$ avec N le nombre de pixels (en 2D) ou de voxels (en 3D).

La mesure est une pile d'images discrètes $b \in R^M$ avec M le nombre de pixels de la pile (nombre de pixels par projection x nombre de projections).



I. Bricault 2018

MATRICE DE PROJECTION

Le principe des méthodes algébriques consiste a rechercher f directement dans un espace de dimension finie, sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de base

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i(x,y).$$

La base la plus utilisée est celle des fonctions caractéristiques des pixels, définies par :

$$\varphi_i(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) = \text{pixel } i, \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases}$$

les pixels de l'image étant numérotés dans un ordre arbitraire (par exemple dans l'ordre de balayage vidéo).

D'autres fonctions de base peuvent être utilisées, par exemple des fonctions polynomiales ou des fonctions adaptées à la géométrie de l'acquisition (typiquement à une géométrie conique). Dans la suite, nous resterons dans le cas simple de la base des pixels.

MATRICE DE PROJECTION

La valeur d'une projection en un point vaut alors:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ji} f_i,$$

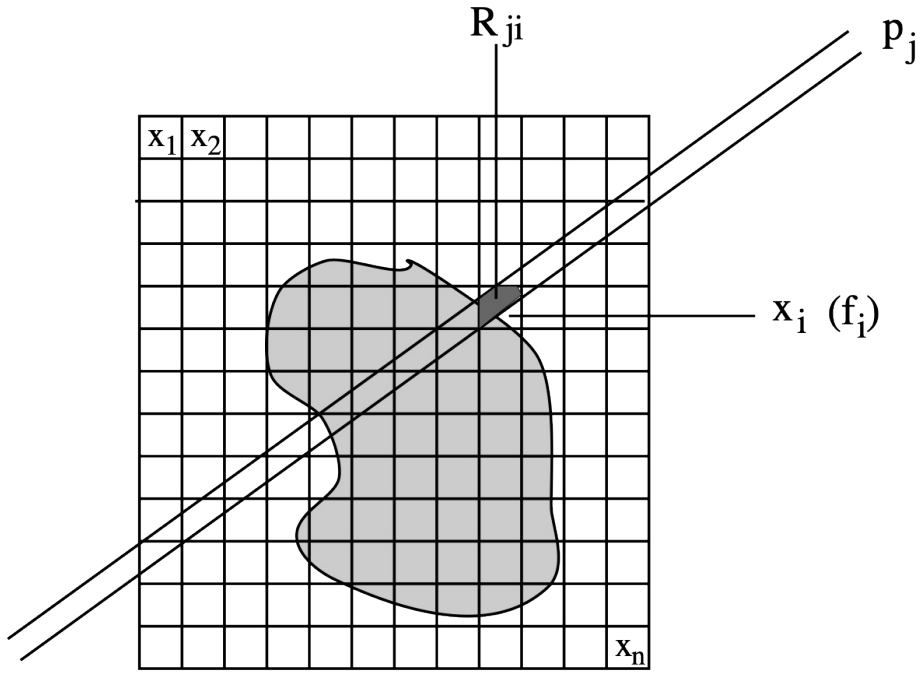
Avec:

$$R_{ji} = \int \varphi_i(u_l \cos\theta_k - v \sin\theta_k, u_l \sin\theta_k + v \cos\theta_k) dv,$$

si p_j désigne la valeur de la projection d'angle θ_k au point u_l.

Le problème s'exprime donc sous la forme matricielle suivante : $P = Rf,$

Ou est R est appelée la matrice de projection



INTERPRETATION

$$P = Rf,$$

P est le vecteur de mesures, chaque composante étant une valeur de projection (un des $p_\theta(ul)$, rangées dans un ordre arbitraire); elle est de taille m égale au produit du nombre de projections par le nombre de points par projection, soit M × NP

f est le vecteur des valeurs recherchées en chaque pixel, chaque composante étant la valeur d'atténuation en un pixel de l'image ; elle est de taille n égale au nombre de pixels, soit N × N

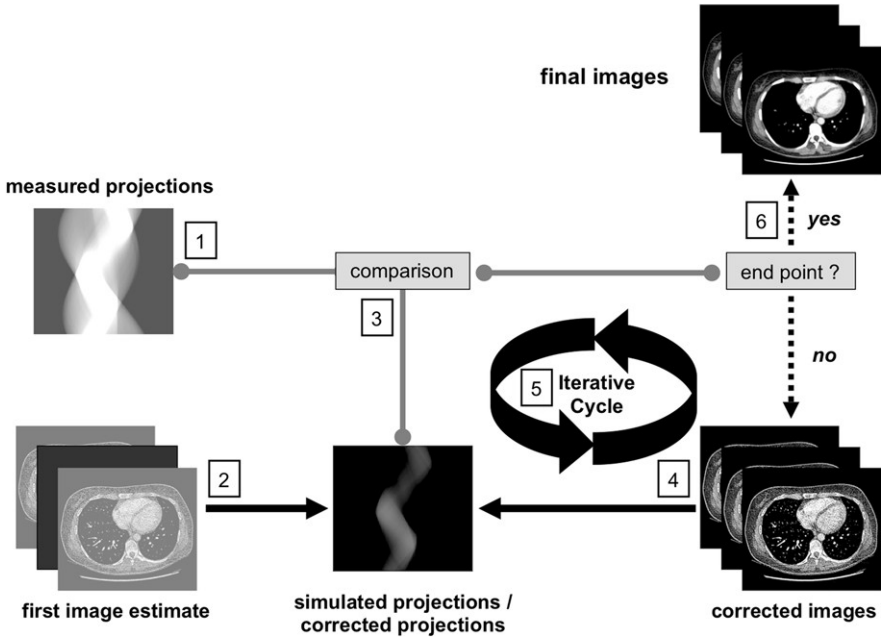
R est la matrice de projection, de taille m×n. Cette matrice ne dépend que de l'acquisition et pas des données. Ses coefficients peuvent donc être calculés une fois pour toute. Le coefficient R_{ji} est caractéristique de l'intersection du rayon j avec le pixel i.

$$R_{ji} = \begin{cases} 1 \text{ si le rayon } j \text{ rencontre le pixel } i, \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$$

$$R_{ji} \propto \text{ surface de recouvrement rayon } j \text{ / pixel } i.$$

INTERPRETATION

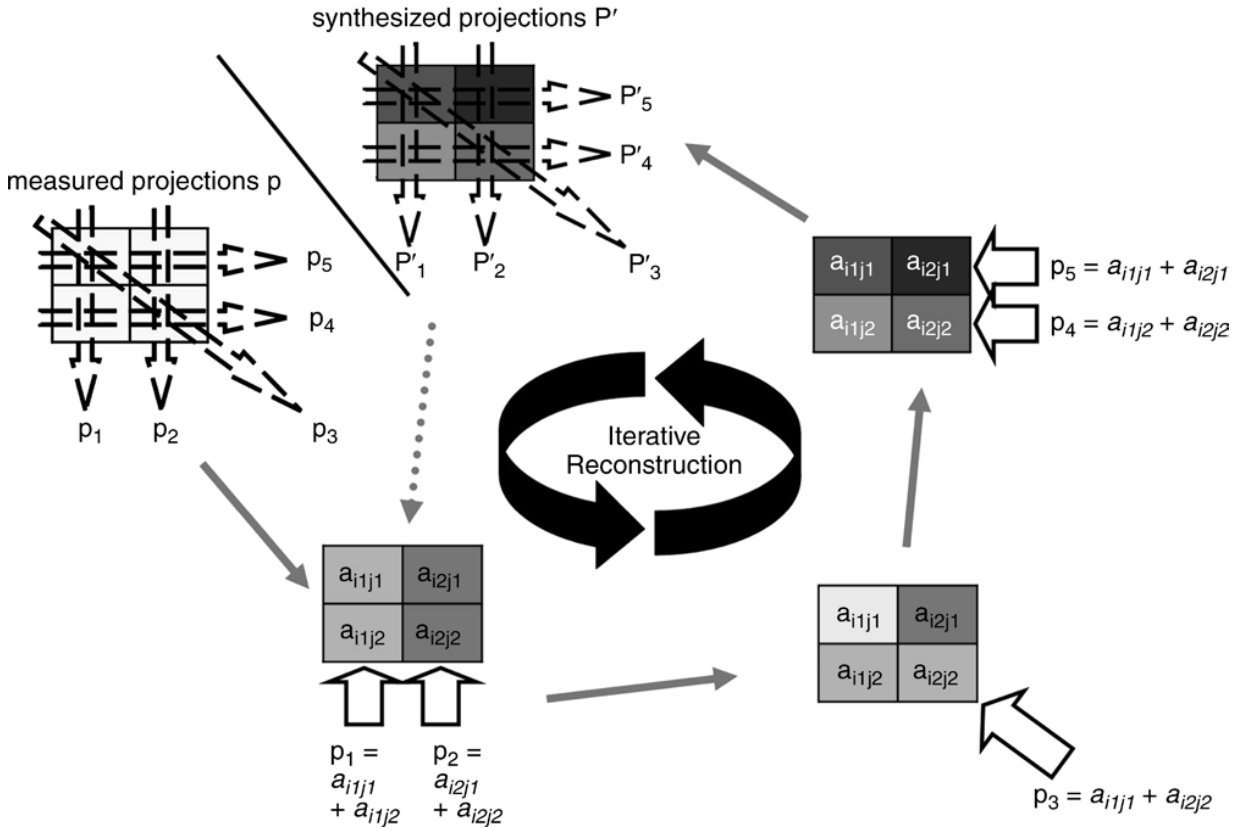
- L’inversion directe de la matrice permettrait de résoudre le problème de reconstruction une fois pour toutes, pour une géométrie d’acquisition donnée (puisque R ne dépend que de cette géométrie). Cela semble d’autant plus intéressant que la matrice est très creuse. La reconstruction d’un jeu de données ne nécessiterait plus qu’un simple produit matriciel.
- Cependant, cette méthode n’est pas réalisable en pratique sur les systèmes de tomographie à rayons X3, en raison de la taille de la matrice (250000 × 250000 au moins), du fait qu’elle n’est pas forcément carrée, et du bruit qui rend le problème mal conditionné, voire singulier
- On préfère des méthodes itératives! Leur principe général consiste à partir d’une initialisation f(0) de f et à corriger itérativement l’estimation, en estimant f(k) à l’itération k à partir des différences entre les projections de f(k−1) et les données P (projections réelles de f).



ART : ALGEBRAIC RECONSTRUCTION TECHNIQUE

Modèle simplifié d'un cycle IR algébrique. Quatre coefficients d'atténuation différents, dans une matrice de 2*2 pixels, sont représentés par cinq projections (p) à trois angles différents (deux acquis dans des directions horizontales, deux dans des directions verticales et un dans des directions obliques).

La matrice est mise à jour successivement par rétroprojection progressive. Les coefficients d'atténuation corrigés peuvent être utilisés pour générer des données de projection synthétisées (P') par projection en avant. Un cycle ultérieur peut être lancé jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait.



EXERCICE – CONCOURS 2015 DQPRM IMAGERIE

D'AUTRES MÉTHODES ALGEBRIQUES

ART

SIRT

ILST

Gradient Conjugué

...

LES MÉTHODES STATISTIQUES

Estimation bayesienne prennant en compte le bruit dans les données maximisent une fonction de vraisemblance

MLEM= Maximum Likelihood Expectation Maximization

calcul de l'espérance de la log-vraisemblance compte tenu des projections p_k mesurées et de l'estimation courante des f_i.

$$f_i^{n+1} = f_i^n \cdot \left[\sum_k r_{ki} \left(p_k / p_k^n\right)\right] / \sum_k r_{ki}$$

$$f^{n+1} = f^n \cdot R^t \left[p / p^n \right]$$

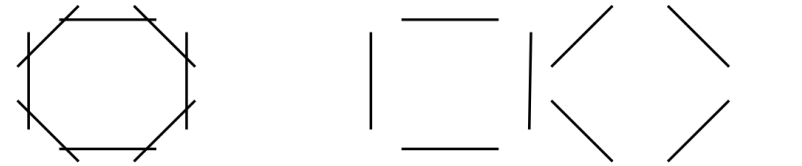
opérateur de rétroprojection

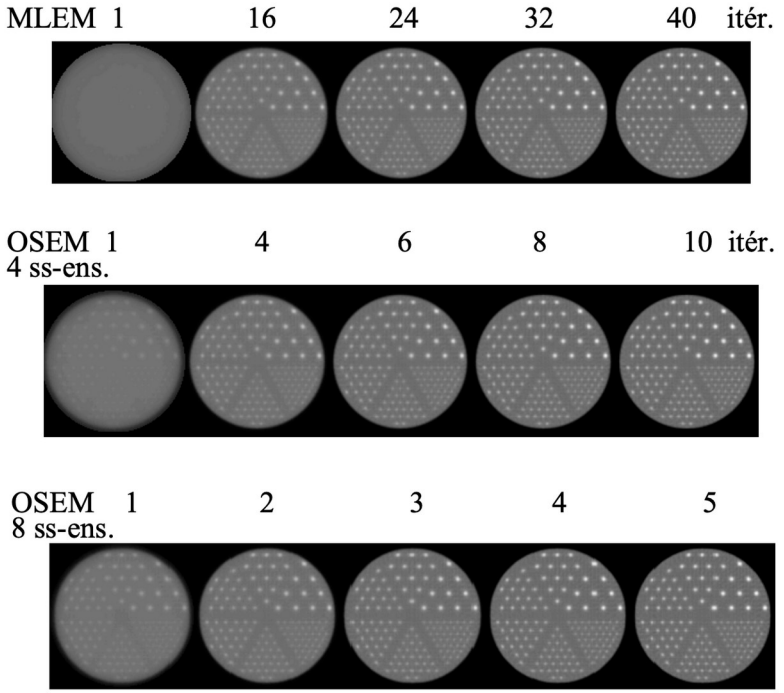
erreur

OSEM

OSEM = Ordered Subset Expectation Maximisa

Version accélérée du MLEM





ANALYTIQUE OU ITERATIF?

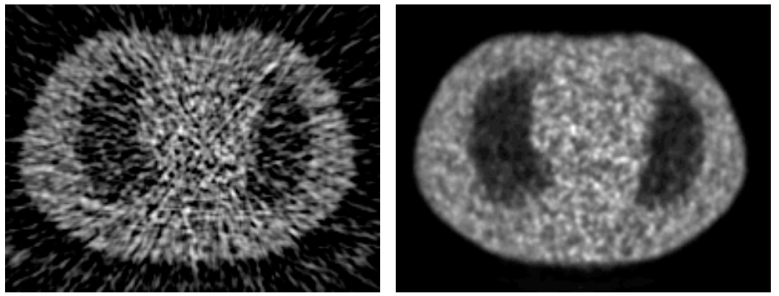
réduction des artefacts de raies

temps de calculs accrus

possible compensation des phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur)

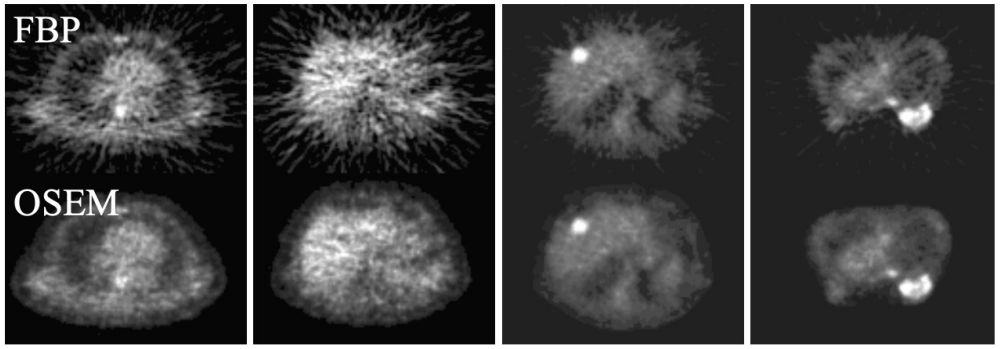
possible modélisation des caractéristiques statistiques des données

Tomographie de transmission PET



rétroprojection filtrée algorithme ML

Tomographie d'émission PET

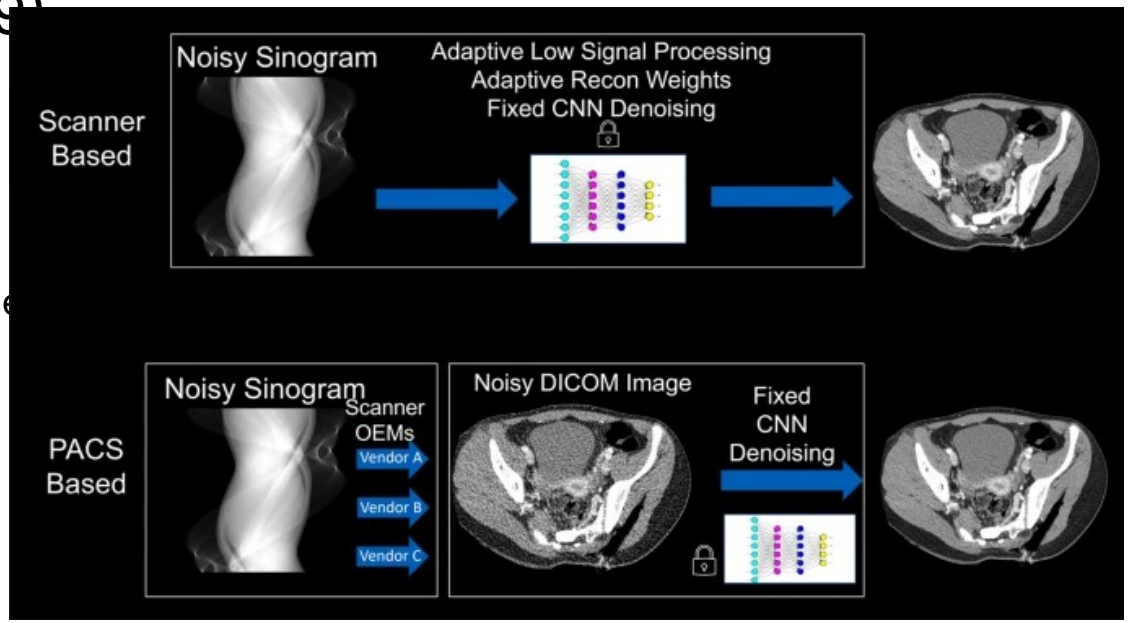


ET L'IA DANS TOUT CA?

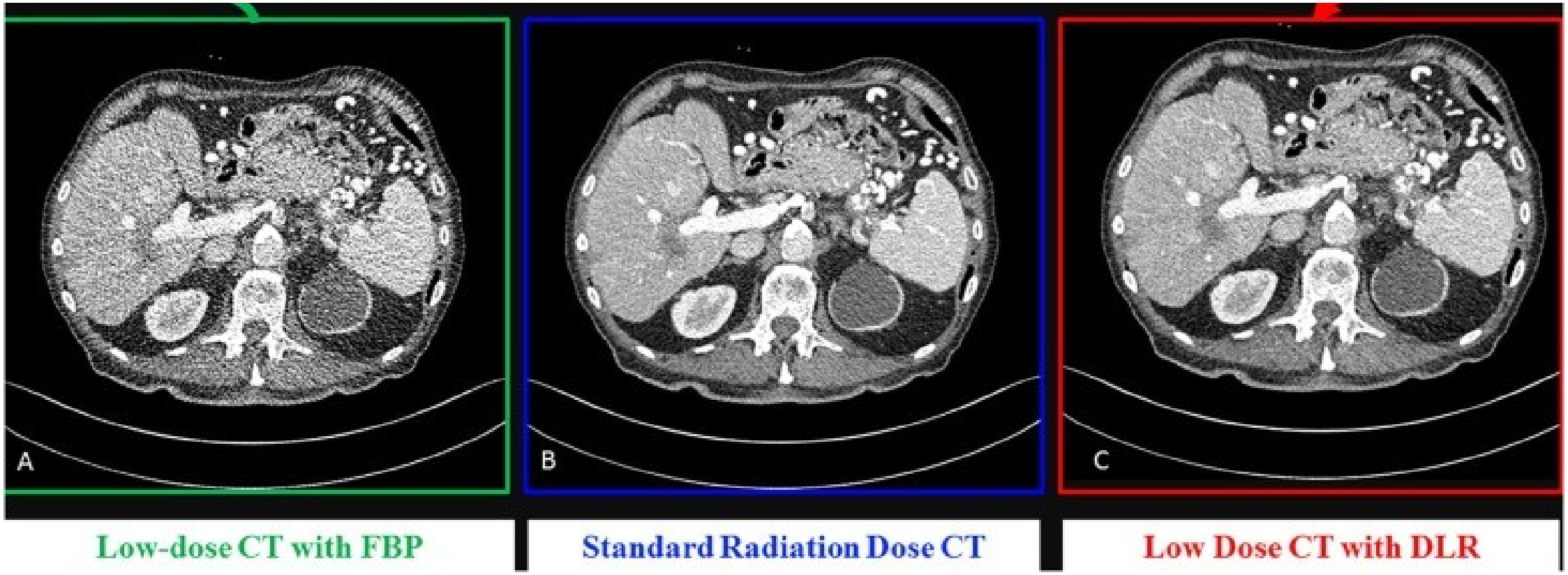
Utilisé depuis peu (émergence vers 2018-2019)

Principe simple:

- Pour l'apprentissage:
  - Faire des scans d'objet à forte dose
  - Faire des scans de ces mêmes objets à (beaucoup) plus basse dose
  - Faire apprendre à la machine à débruiter dans différents cas
- Pour les images avec patients
  - Faire une acquisition a faible dose
  - Utiliser le modèle appris pour débruiter les images



ET CA MARCHE L'IA?



Singh, R., Wu, W., Wang, G., & Kalra, M. K. (2020). Artificial intelligence in image reconstruction: the change is here. *Physica Medica*, *79*, 113-125.

PLAN

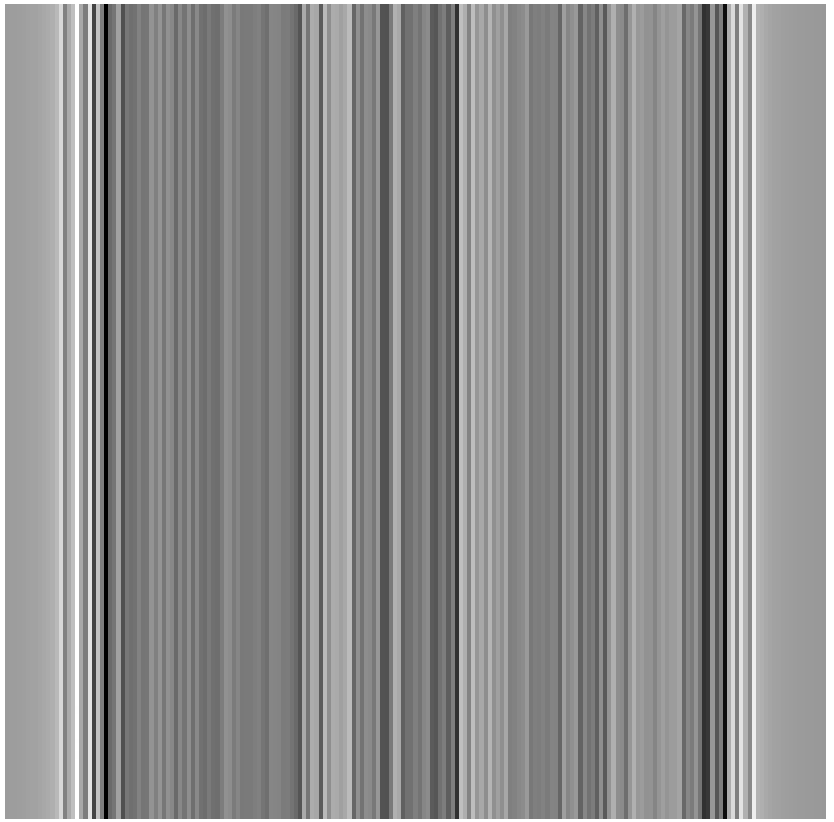
Introduction

Reconstruction Analytique

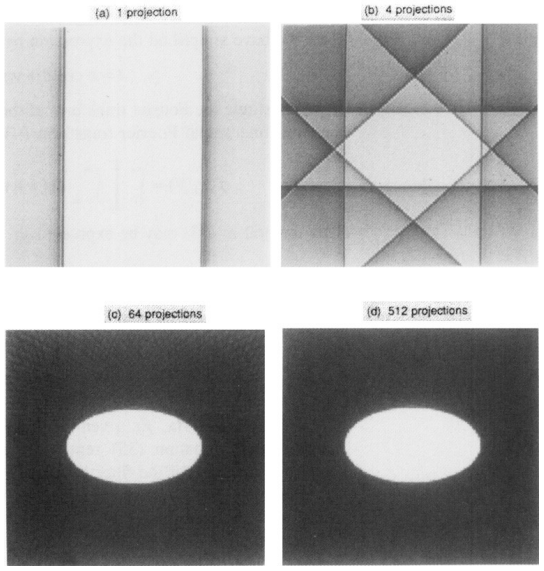
Reconstruction Itérative

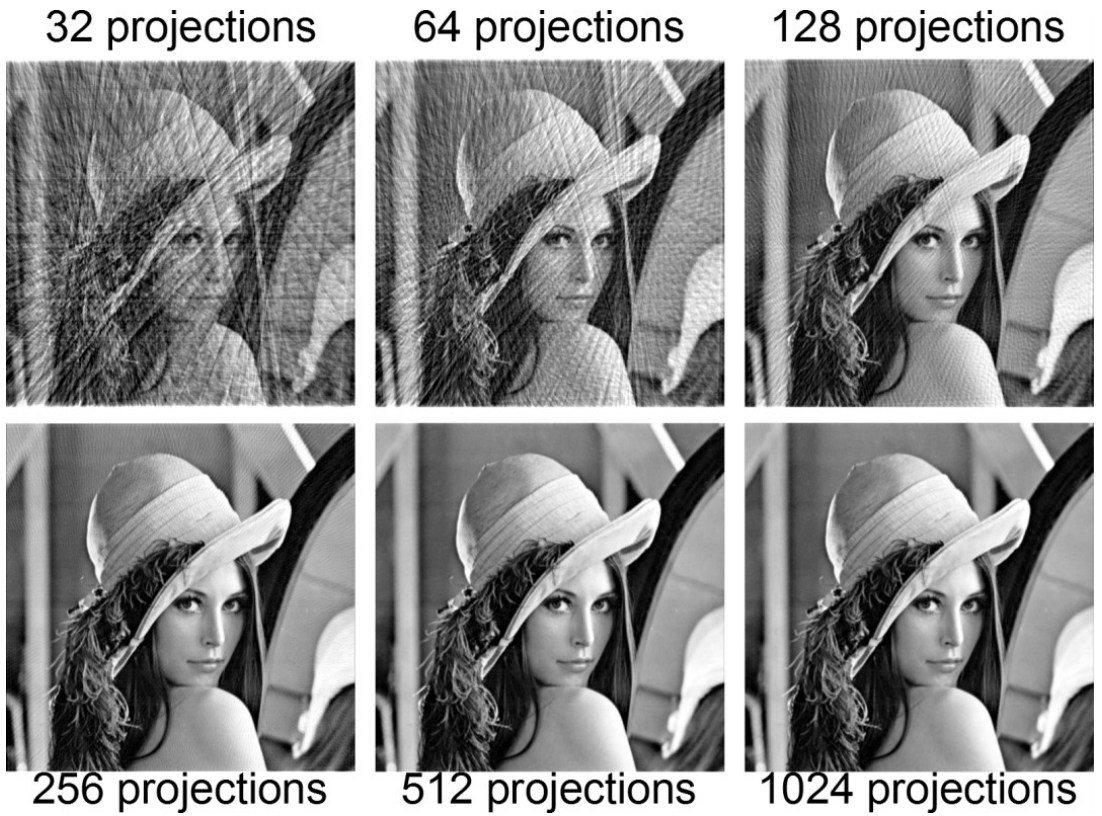
Artefacts en tomographie

Conclusion



LE MANQUE DE PROJECTIONS



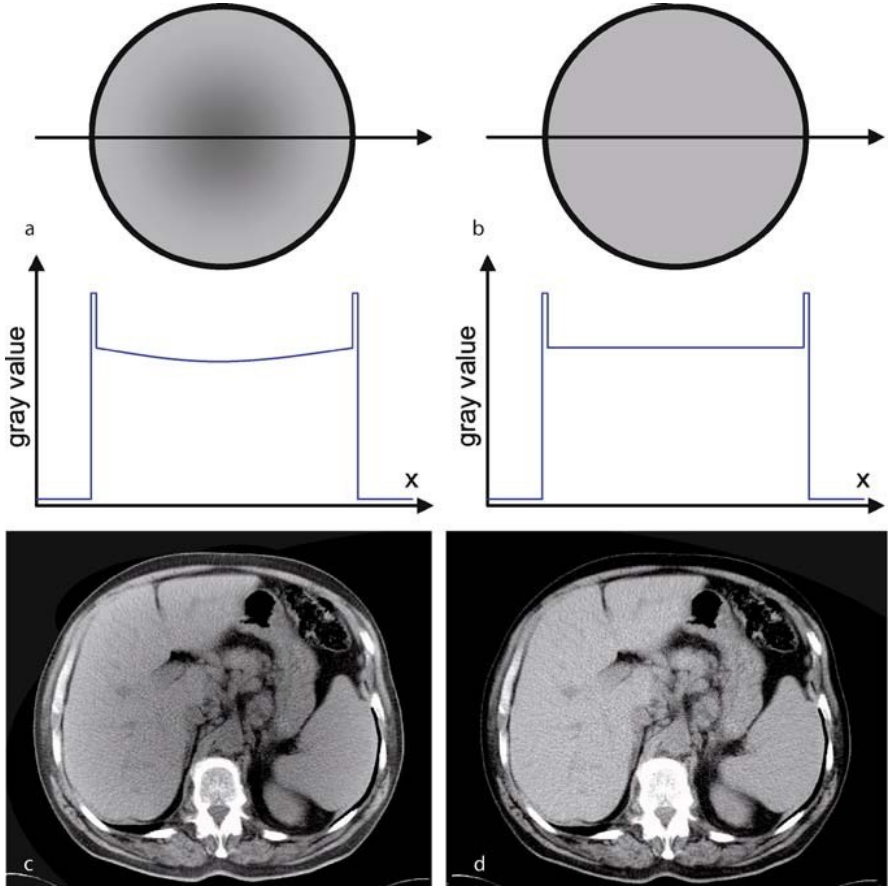


Il est généralement admis que le nombre requis de projections est égal à $N_P = N_D \times \pi/2$ avec N_D le nombre d'échantillons du détecteur dans la direction orthogonale à l'axe de rotation.

DURCISSEMENT DE FAISCEAU

Solutions:

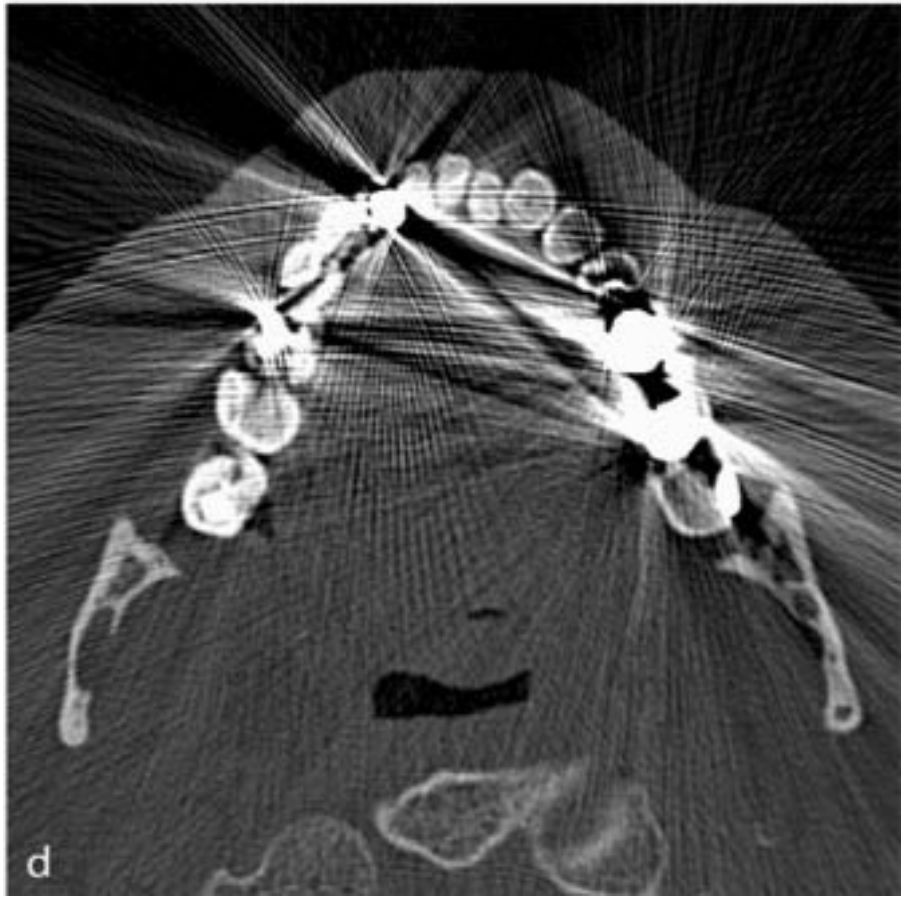
- Source monochromatique (Synchrotron)
- Des materiaux filtrants en amont du patient
- monomaterial assumption [Brooks and Di Chiro 1976] or bimaterial [Joseph and Spital 1978]
- Detection Spectrale



METAL ARTEFACT

Provoque principalement un manque de photons (c'est-à-dire un problème de données extérieures), mais aussi un durcissement du faisceau et une dispersion.

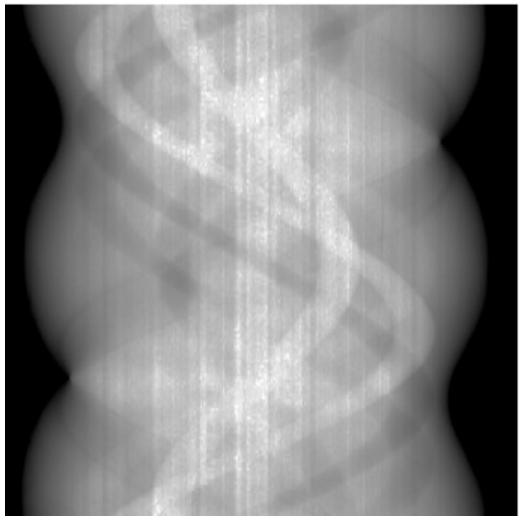
Solution : remplacer les données manquantes par une supposition.

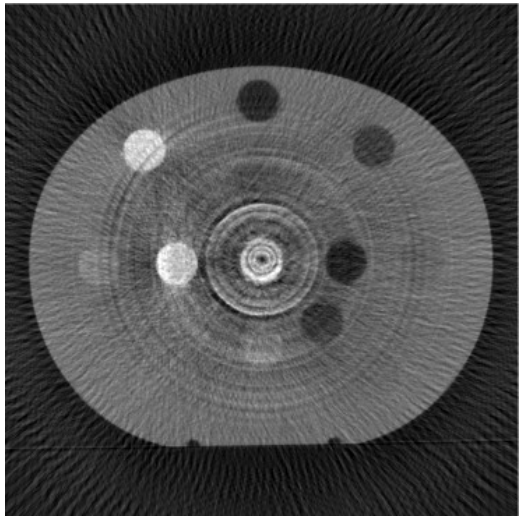


RING ARTEFACTS

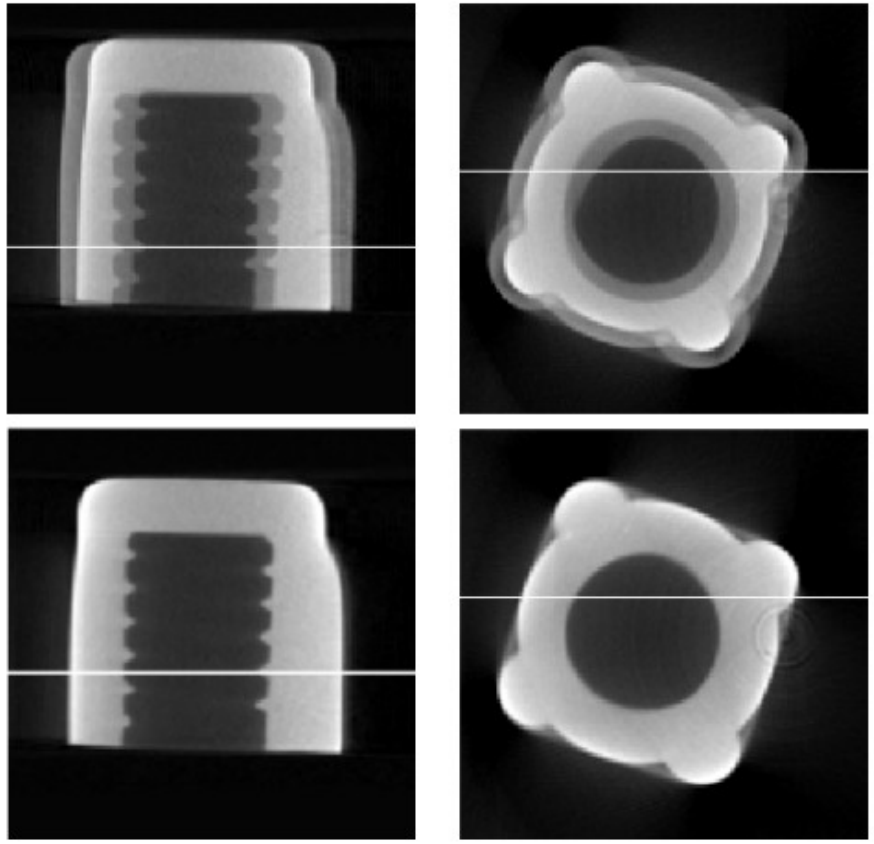
Généralement causée par un mauvais étalonnage du I_0

Solutions: reclibrer ou post processing.

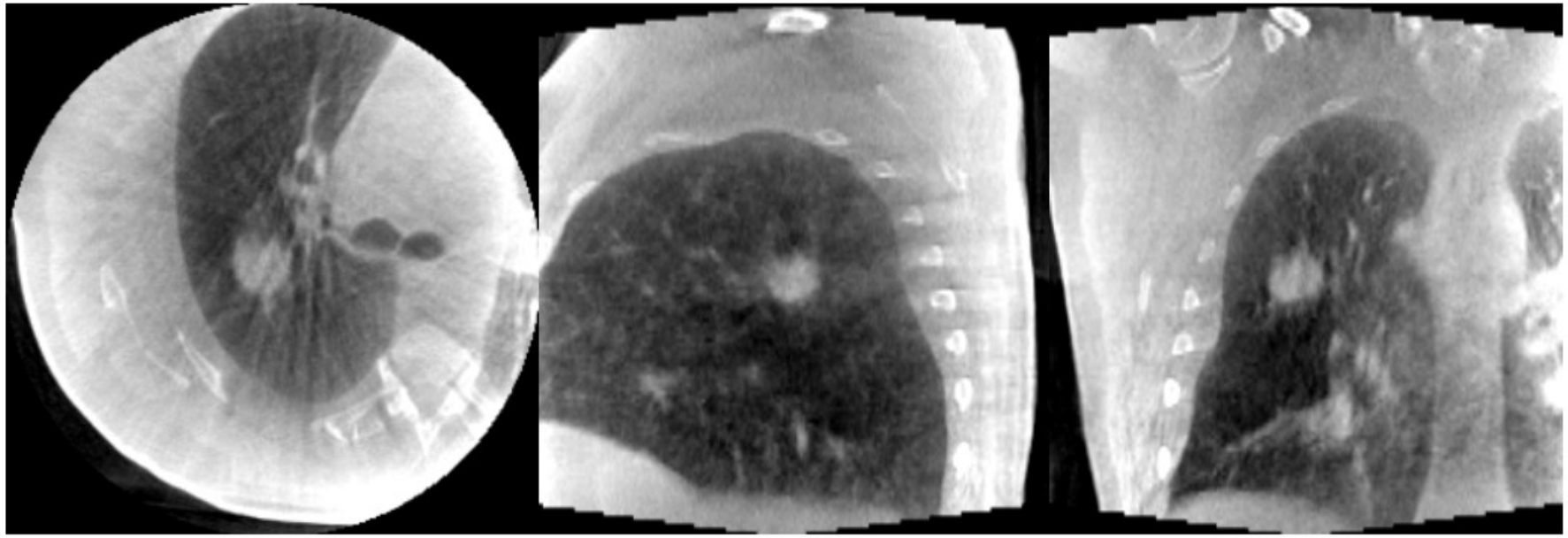




MUAVAISE CALIBRATION GEOMETRIQUE



ARTEFACTS DE MOUVEMENTS



CONCLUSIONS

Il s'agit d'une simple introduction, mais le domaine de la recherche est encore très actif.

La reconstruction par rétroprojection filtrée reste la norme clinique.

Aujourd'hui, la reconstruction itérative est disponible en clinique.

Ouvrages de référence :

- S.R. Deans. The Radon transform and some of its applications. Courier Corporation, 1983
- A.C. Kak et M. Slaney. Principles of computerized tomographic imaging (Principes de l'imagerie tomographique informatisée). IEEE Press, 1988
- F. Natterer. Les mathématiques de la tomographie informatisée. John Wiley & Sons, 1986
- T.M. Buzug. Computed tomography : from photon statistics to modern cone-beam CT. Springer Science & Business Media, 2008
- G.L. Zeng. Reconstruction d'images médicales. Springer, 2010

OBJECTIFS DU COURS

Comprendre les liens entre espace réel, le sinogramme et l'espace de Fourier

Comprendre un algorithme de reconstruction (FBP)

Comprendre un/des algorithme(s) itératif(s)